

Nombres complexes version algébrique.



Girolamo Cardano (1501-1576) propose une formule permettant de résoudre des équations du 3^e degré en faisant intervenir la racine carrée d'un nombre négatif.

I. L'ensemble \mathbb{C} .

Définition :

Il existe un ensemble de nombres, noté \mathbb{C} , appelé ensemble des nombres complexes, contenant \mathbb{R} qui possède les propriétés suivantes :

☉ L'addition et la multiplication de nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calculs restent les mêmes.

☉ Il existe dans \mathbb{C} un nombre i tel que $i^2 = -1$

☉ Tout élément z de \mathbb{C} s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ avec a et b réels

Exemples :

$$z_1 = 2 + 3i \quad z_2 = 5 = 5 + 0i \quad i = 0 + 1i$$

Définition :

☉ L'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels s'appelle la forme algébrique du nombre complexe z .

☉ Le nombre a s'appelle la partie réelle du nombre complexe z et se note $\text{Re}(z)$

☉ Le nombre b s'appelle la partie imaginaire du nombre complexe z et se note $\text{Im}(z)$

☑ Savoir-faire : Savoir identifier la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe :

Dans chaque cas détermine $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$: ☉ $z_1 = 3 - 2i$ ☉ $z_2 = -3$ ☉ $z_3 = i$

$$\begin{array}{l} \text{Re}(z_1) = 3 \\ \text{Im}(z_1) = -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Re}(z_2) = -3 \\ \text{Im}(z_2) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Re}(z_3) = 0 \\ \text{Im}(z_3) = 1 \end{array}$$

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, alors :

☉ Si $b = 0$, on dit que z est un nombre réel

☉ Si $a = 0$, on dit que z est un nombre imaginaire pur

II. Calculs dans \mathbb{C} .

☑ Savoir-faire : Savoir ajouter ou multiplier des nombres complexes :

Simplifier les écritures des nombres suivant en exprimant le résultat sous la forme algébrique.

☉ $z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$ ☉ $z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$

$$\begin{array}{l} z_1 = 3 - 5i - 3i + 4 \\ z_1 = 7 - 8i \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Re}(z_2) = 7 \\ \text{Im}(z_2) = -8 \end{array} \quad \begin{array}{l} z_2 = -3 + 15i + 2i - 10i^2 \\ z_2 = 7 + 17i \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Re}(z_2) = 7 \\ \text{Im}(z_2) = 17 \end{array}$$

☑ Savoir-faire : Savoir déterminer l'inverse d'un nombre complexe :

Donne la forme algébrique des inverses des nombres : ☉ $z_3 = 3$ ☉ $z_4 = 2i$ ☉ $z_5 = 3i + 2$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{z_3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + 0i \\ \frac{1}{z_4} = \frac{1}{2i} = \frac{1}{2i} \times \frac{i}{i} = \frac{i}{-2} = 0 - \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{z_5} = \frac{1}{2+3i} = \frac{1}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2+3i} = \frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i \end{array}$$

☑ Savoir-faire : Savoir simplifier un quotient de nombres complexes :

Simplifier les écritures des nombres suivant en exprimant le résultat sous la forme algébrique.

Donne la forme algébrique des nombres :

$$z_6 = \frac{1}{4-2i} \times \frac{4+2i}{4+2i} = \frac{4+2i}{20} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i$$

$$z_7 = \frac{1+i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = \frac{2+i+2i+i^2}{5} = \frac{1+3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

$$\operatorname{Re}(z_6) = \frac{1}{5} \quad \operatorname{Im}(z_6) = \frac{1}{10}$$

$$\operatorname{Re}(z_7) = \frac{1}{5} \quad \operatorname{Im}(z_7) = \frac{3}{5}$$

☑ Savoir-faire : Savoir calculer une puissance des nombres complexes niveau 1:

Donne la forme algébrique des nombres :

$$z_8 = (3i-4)(3i-4)$$

$$z_9 = (1+2i)(1+2i)(1+2i)$$

$$z_8 = 9i^2 - 12i - 12i + 16 = 7 - 24i$$

$$z_9 = (-3+4i)(1+2i) = -3 - 6i + 4i + 8i^2 = -11 - 2i$$

Théorème : Formule du binôme de Newton.

Pour tous nombres a et b et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\odot (a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Démonstration exigible :

Triangle de Pascal

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & 1 & \\ \rightarrow & & 1 & 2 & 1 \\ \rightarrow & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ \rightarrow & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

☑ Savoir-faire : Savoir calculer une puissance des nombres complexes niveau 2:

Donne la forme algébrique des nombres :

$$\odot z_{10} = (2+i)^3 \quad \odot z_{11} = (1+2i)^5$$

$$z_{10} = 2^3 + 3 \times 2^2 \times i + 3 \times 2 \times i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$$

$$z_{11} = 1^5 + 5 \times 1^4 \times (2i) + 10 \times 1^3 \times (2i)^2 + 10 \times 1^2 \times (2i)^3 + 5 \times 1 \times (2i)^4 + (2i)^5$$

$$z_{11} = 1 + 10i - 40 - 80i + 80 + 32i = 41 - 38i$$

Remarque :

On détermine les coefficients avec le triangle de Pascal.

III. Conjugué d'un nombre complexe :

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, alors :
On appelle nombre complexe conjugué de z , le nombre $\bar{z} = a - ib$

Les nombres z et \bar{z} ont la même partie *réelle* et des parties *imaginaires opposées* -

☑ **Savoir-faire :** Savoir déterminer le conjugué d'un nombre complexe :

☺ $z_1 = 3 - 5i$ ☺ $z_2 = 5$ ☺ $z_3 = i$ ☺ $z_4 = -i$
 $\bar{z}_1 = 3 + 5i$ $\bar{z}_2 = 5$ $\bar{z}_3 = -i$ $\bar{z}_4 = i$

Propriétés : Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes, alors : ☺ $\overline{\bar{z}_1} = z_1$ ☺ $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Démonstration :

$z_1 = a + bi$ $\bar{z}_1 = a - bi$ $\overline{\bar{z}_1} = a + bi = z_1$ $\overline{z_1 + z_2} = a - bi + a - b'i$
 $z_2 = a' + b'i$ $\bar{z}_2 = a' - b'i$ $\overline{z_1 + z_2} = a + a' - (b + b')i$ $\overline{z_1 + z_2} = a + a' - (b + b')i$

Propriété : Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes, alors : ☺ $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$

Démonstration exigible :

$z_1 = a + bi$ $z_2 = a' + b'i$ $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{(a + bi) \times (a' + b'i)} = \overline{aa' - bb' + (ab' + ba')i} = \overline{aa' - bb' + (ab' + ba')i} = aa' - bb' - (ab' + ba')i$
 $\bar{z}_1 = a - bi$ $\bar{z}_2 = a' - b'i$ $\bar{z}_1 \times \bar{z}_2 = (a - bi) \times (a' - b'i) = aa' - bb' - (ab' + ba')i$

Propriété : Soit z un nombre complexe, et n entier naturel non nul, alors : ☺ $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Démonstration exigible : Démonstration par récurrence -

Initialisation : $n_0 = 1$ $\bar{z}^1 = \bar{z} = \bar{z}^1$ (OK)
Récurrence : supposons que $\bar{z}^k = \overline{z^k}$
 $\bar{z}^{k+1} = \bar{z}^k \times \bar{z} = \overline{z^k} \times \bar{z} = \overline{z^k \times z} = \overline{z^{k+1}}$ (OK)

Propriété : Soit z un nombre complexe, et n entier naturel non nul, alors : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ avec $z \neq 0$

Démonstration exigible : $z = a + ib$ $z \neq 0$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1}{a + ib} \times \frac{a - ib}{a - ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$
 $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a - ib} = \frac{1}{a - ib} \times \frac{a + ib}{a + ib} = \frac{a + ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2} i$ **Donc** $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2} i = \frac{1}{\bar{z}}$

Propriétés : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, alors :

☺ z est réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$ ☺ z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$ ☺ $z\bar{z} = a^2 + b^2$

$z = a + ib$ $\bar{z} = a - ib$ $z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab - b^2 i^2 = a^2 + b^2$

IV. Équations dans \mathbb{C} .

Propriétés :

- ⊙ Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
- ⊙ Un nombre complexe est nul, si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

☑ Savoir-faire : Savoir résoudre une équation dans \mathbb{C} :

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : (E) : $3z - 6 = 4i + z$

$$(E) \Leftrightarrow 2z = 6 + 4i$$

$$(E) \Leftrightarrow z = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$$

(E) a une solution dans \mathbb{C} qui est $z_0 = 3+2i$

☑ Savoir-faire : Savoir résoudre une équation dans \mathbb{C} avec le conjugué :

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : (E) : $3z - 2 = \bar{z} + 1$

On pose $z = a+ib$

$$(E) \Leftrightarrow 3(a+ib) - 2 = (a-ib) + 1$$

$$(E) \Leftrightarrow 3a + 3ib - 2 = a - ib + 1$$

$$(E) \Leftrightarrow 2a - 3 + 4bi = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - 3 = 0 \\ 4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 0 \end{cases} \text{ Donc (E) a une solution } z_0 = \frac{3}{2}$$

☑ Savoir-faire : Savoir déterminer un ensemble de nombres complexes :

Détermine tous les nombres complexes z tels que $z^2 - \bar{z}$ soit un nombre réel.

$$z = a+ib$$

$$z^2 - \bar{z} = (a+ib)^2 - (a-ib)$$

$$= a^2 + 2abi - a + ib$$

$$= (a^2 - a) + (2ab + b)i$$

$$z^2 - \bar{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z^2 - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow 2ab + b = 0 \Leftrightarrow (2a+1)b = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ ou } b = 0$$

\Rightarrow Tous les nombres réels
 \Rightarrow Tous les nombres dont la partie réelle est $-\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} z_0 &= -\frac{1}{2} + 2i \\ z_0^2 - \bar{z}_0 &= \left(-\frac{1}{2} + 2i\right)^2 - \left(-\frac{1}{2} - 2i\right) \\ &= \frac{1}{4} + 2i - 4 + \frac{1}{2} + 2i \\ &= -\frac{13}{4} + 4i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$