Nombres complexes version algébrique.

Girolamo Cardano *(1501-1576) propose une formule permettant de résoudre des équations du 3° degré en faisant intervenir la racine carrée d'un nombre négatif.*

I. L'ensemble $\mathbb{C}$.

Définition :

Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes, contenant $\mathbb{R}$ qui possède les propriétés suivantes :

☺ L'addition et la multiplication de nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calculs restent les mêmes.

☺ Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre i tel que ....

☺ Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme ....avec ....

Exemples :

....

....

Définition :

☺ L'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels, s'appelle .... du nombre complexe z.

☺ Le nombre a s'appelle .... du nombre complexe z et se note ....

☺ Le nombre b s'appelle .... du nombre complexe z et se note ....

☑ *Savoir-faire : Savoir identifier la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe :*

Dans chaque cas détermine $Re(z)$ et $Im(z)$: ☺ $z_1 = 3 - 2i$ ☺ $z_2 = -3$ ☺ $z_3 = i$

....

....

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, alors :

☺ Si $b = 0$, on dit que ....

☺ Si $a = 0$, on dit que ....

II. Calculs dans $\mathbb{C}$.

☑ *Savoir-faire : Savoir ajouter ou multiplier des nombres complexes :*

Simplifier les écritures des nombres suivant en exprimant le résultat sous la forme algébrique.

☺ $z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$ ☺ $z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer l'inverse d'un nombre complexe :*

Donne la forme algébrique des inverses des nombres : ☺ $z_3 = 3$ ☺ $z_4 = 2i$ ☺ $z_5 = 3i + 2$

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir simplifier un quotient de nombres complexes :*

Simplifier les écritures des nombres suivant en exprimant le résultat sous la forme algébrique.

Donne la forme algébrique des nombres : ☺ $z_6 = \frac{1}{4-2i}$ ☺ $z_7 = \frac{1+i}{2-i}$

....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer une puissance des nombres complexes niveau 1:*

Donne la forme algébrique des nombres : ☺ $z_8 = (3i-4)^2$ ☺ $z_9 = (1+2i)^3$

....

....

Théorème : Formule du binôme de Newton.

Pour tous nombres a et b et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

☺ $(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$

Démonstration exigible :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer une puissance des nombres complexes niveau 2:*

Donne la forme algébrique des nombres : ☺ $z_{10} = (2+i)^3$ ☺ $z_{11} = (1+2i)^5$

....

....

....

....

Remarque :

....

....

III. Conjugué d'un nombre complexe :

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, alors :
On appelle nombre complexe conjugué de z, le nombre ....

Les nombres z et $\bar{z}$ ont la même partie .... et des parties ....

☑ ***Savoir-faire : Savoir déterminer le conjugué d'un nombre complexe :***

☺ $z_1 = 3 - 5i$ ☺ $z_2 = 5$ ☺ $z_3 = i$ ☺ $z_4 = -i$

....

....

Propriétés : Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes, alors : ☺ $\overline{\overline{z_1}} = z_1$ ☺ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Démonstration :

....

....

Propriété : Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes, alors : ☺ $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$

Démonstration exigible :

....

....

Propriété : Soit z un nombre complexe, et n entier naturel non nul, alors : ☺ $\overline{z^n} = \bar{z}^{\,n}$

Démonstration exigible :

....

....

....

Propriété : Soit z un nombre complexe, et n entier naturel non nul, alors : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ avec $z \neq 0$

Démonstration exigible :

....

....

....

....

Propriétés : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, alors :
☺ z est réel $\Leftrightarrow$ .... ☺ z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ .... ☺ $z\bar{z} =$ ....

....

....

IV. Équations dans $\mathbb{C}$.

Propriétés :

☺ Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

☺ Un nombre complexe est nul, si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre une équation dans $\mathbb{C}$:*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\ :\ 3z-6=4i+z$

....

....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre une équation dans $\mathbb{C}$ avec le conjugué :*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\ :\ 3z-2=\bar{z}+1$

....

....

....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer un ensemble de nombres complexes :*

Détermine tous les nombres complexes z tels que $z^2-\bar{z}$ soit un nombre réel.

....

....

....

....

....