

Raisonnement par récurrence.

Principe : On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file. Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent.

Définition

Une propriété est dite héréditaire à partir du rang n_0 si lorsque pour un entier $k \geq n_0$, la propriété est vraie, alors elle est vraie pour l'entier $k+1$.

Dans l'exemple, si on suppose qu'un domino (k) tombe alors le domino suivant ($k+1$) tombe également.

Principe du raisonnement par récurrence

Si une propriété P est : - vraie au rang n_0 (Initialisation),
- héréditaire à partir du rang n_0 (Hérédité),
alors la propriété P est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Dans l'exemple, le premier domino tombe (initialisation). Ici $n_0 = 1$. L'hérédité est vérifiée (voir plus haut). On en déduit que tous les dominos tombent.

☑ Savoir-faire : Savoir démontrer propriété par récurrence :

Soit un nombre réel a strictement positif. Démontrons que pour tout entier naturel n , on a : $(1+a)^n \geq 1+na$.
Cette propriété porte le nom d'inégalité de Bernoulli.

- Initialisation :

.....
.....

- Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $(1+a)^k \geq 1+ka$ (Hypothèse de récurrence).

La propriété est-elle vraie au rang $k+1$? Démontrons alors que : $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$ (Hérédité).

.....
.....
.....
.....
.....

Remarque : L'initialisation est indispensable.

En effet, démontrons par exemple que la propriété " 2^n est divisible par 3" est héréditaire sans vérifier l'initialisation. Supposons qu'il existe un entier k tel que 2^k est divisible par 3. $2^{k+1} = 2^k \times 2 = 3p \times 2 = 6p$, où p est un entier (d'après l'hypothèse de récurrence).

Donc 2^{k+1} est divisible par 3. L'hérédité est vérifiée et pourtant la propriété n'est jamais vraie.

☑ Savoir-faire : Savoir démontrer une propriété sur une suite par récurrence :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$.

Démontrer par récurrence que : $u_n = (n+1)^2$.

.....
.....
.....
.....
.....