Raisonnement par récurrence.

Principe : On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file. Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent.

Définition

Une propriété est dite héréditaire à partir du rang n_0 si lorsque pour un entier $k \geq n_0$, la propriété est vraie, alors elle est vraie pour l'entier k+1.

Dans l'exemple, si on suppose qu'un domino (k) tombe alors le domino suivant (k+1) tombe également.

Principe du raisonnement par récurrence

Si une propriété P est : - vraie au rang n_0 (Initialisation),
- héréditaire à partir du rang n_0 (Hérédité),

alors la propriété P est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Dans l'exemple, le premier domino tombe (initialisation). Ici $n_0 = 1$. L'hérédité est vérifiée (voir plus haut). On en déduit que tous les dominos tombent.

☑ Savoir-faire : Savoir démontrer propriété par récurrence :

Soit un nombre réel a strictement positif. Démontrons que pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n \geq 1+na$.

Cette propriété porte le nom *d'inégalité de Bernoulli.*

- Initialisation :

On pose $n=0$ $(1+a)^0 = 1$ $1+0\times a = 1$ Donc $(1+a)^0 \geqslant 1+0\times a$

Donc la propriété est vraie au rang $n=0$

- Hérédité :

Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $(1+a)^k \geq 1+ka$ (Hypothèse de récurrence).

La propriété est-elle vraie au rang k+1 ? Démontrons alors que : $(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a$ (Hérédité).

On suppose que $(1+a)^k \geqslant 1+ka$

$(1+a)^{k+1} = (1+a)^1(1+a)^k \geqslant (1+a)(1+ka)$

donc $(1+a)^{k+1} = 1+a+ka+ka^2 \geqslant 1+a+ka$ car $ka^2>0$

donc $(1+a)^{k+1} = 1+a(k+1)$

donc la propriété est vraie donc $n=0$; de plus elle est héréditaire donc par récurrence elle est vraie pour tout nombre n.

Remarque : L'initialisation est indispensable.

En effet, démontrons par exemple que la propriété "2^n est divisible par 3" est héréditaire sans vérifier l'initialisation. Supposons qu'il existe un entier k tel que 2^k est divisible par 3. $2^{k+1} = 2^k \times 2 = 3p \times 2 = 6p$, où p est un entier (d'après l'hypothèse de récurrence).

Donc 2^{k+1} est divisible par 3. L'hérédité est vérifiée et pourtant la propriété n'est jamais vraie.

☑ Savoir-faire : Savoir démontrer une propriété sur une suite par récurrence :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$.

Démontrer par récurrence que : $u_n = (n+1)^2$.

• Initialisation : $n=0$ $u_0 = 1$ $(0+1)^2 = 1$ Donc $u_0 = (0+1)^2$

• Hérédité : On suppose que $\in k$ / $u_k = (k+1)^2$ Montrons que $u_{k+1} = (k+1+1)^2$

$u_{k+1} = u_k + 2k + 3 = (k+1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$

Donc la prop. est héréditaire

Donc nous pourons affirmer que $\forall n$, $u_n\ (k+1)^2$