Généralités sur les suites.

I. Définition :

*Voici un problème posé en 1202 par **Leonardo Pisano** dit **Fibonacci**.*

Un fermier achète un couple de bébés lapins. Après 2 mois, ce couple commence à se reproduire et donne naissance à un nouveau couple de lapins qui au bout de deux mois, se reproduira à son tour. Chaque couple donnant naissance à un nouveau couple tous les mois, lesquels commencent à se reproduire au bout de deux mois.

Nombre de mois	Bébés	ados	adultes	total
0	1	0	0	1
1	0	1	0	1
2	1	0	1	2
3	1	1	1	3
4	2	1	2	5
5	3	2	3	8

On crée ainsi une suite de nombres :
{1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ...

On indexe chacun des nombres de la liste. On Note u_0 le nombre de lapins le premier mois, u_1 celui le deuxième mois, etc… On a donc

$u_0 = 1$; $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 3$; $u_4 = 5$; $u_5 = 8$ ...

On note (u_n) l'ensemble des nombres de cette suite de nombres. On dit que u_5 est le terme de la suite de rang 5 (ou d'indice 5)

Attention u_1 n'est pas forcément le début de la suite

On a ainsi défini une suite numérique.

On peut lui associer une fonction définie sur $\mathbb{N}$ par u : $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto u(n) = u_n$

Définition

Une <u>suite numérique</u> (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n. Le nombre u_n est appelé le <u>terme de rang n</u> de cette suite (ou d'indice n).

Attention, ne pas confondre (u_n) qui est l'ensemble des termes

et u_n qui est un nombre, le terme du rang n

II. Deux différents modes de création d'une suite :

☺ Suites définies en fonction de n.

☑ *<u>Savoir faire : Savoir calculer un terme d'une suite définie en fonction de n :</u>*

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout n de N, $u_n = 2n^2 + 3$.

Calcule u_0, u_1, u_2, u_5, u_{100}

$u_0 = 2 \times 0^2 + 3 = 3$; $u_1 = 2 \times 1^2 + 3 = 5$; $u_2 = 2 \times 2^2 + 3 = 2 \times 4 + 3 = 8 + 3 = 11$; $u_5 = 2 \times 5^2 + 3 = 53$

$u_{100} = 2 \times 100^2 + 3 = 2 \times 10\,000 + 3 = 20\,003$

Exprime en fonction de n : u_{n+1}, u_{2n}, u_{2n-1}, $2u_n+1$, $-u_{n+1}+3$.

$u_n = 2n^2 + 3$; $u_{n+1} = 2(n+1)^2 + 3 = 2n^2 + 4n + 3$; $u_{2n} = 2(2n)^2 + 3 = 8n^2 + 3$

$u_{2n-1} = 2(2n-1)^2 + 3$;

$2u_n + 1 = 2 \times [2n^2 + 3] + 1 = 4n^2 + 7$

$-u_{n+1} + 3 = -[2(n+1)^2 + 3] + 3 = -2n^2 - 4n + 1$

☺ Suites définies par récurrence.

☑ *Savoir faire : Savoir calculer un terme d'une suite définie par récurrence :*

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\,u_n + 5$.

Calcule u_1, u_2, u_3, u_4, u_{100}

$\begin{cases} U_0 = 3 \\ \forall n \ U_{n+1} = 2U_n + 5 \end{cases}$

$U_1 = 2 \times U_0 + 5 = 2 \times 3 + 5 = 6 + 5 = 11$

$U_2 = 2 \times U_1 + 5 = 2 \times 11 + 5 = 22 + 5 = 27$

$U_3 = 2 \times U_2 + 5 = 2 \times 27 + 5 = 59$

Contrairement à une suite définie par une formule explicite, on ne peut pas connaître u_{100} sans connaître U_{99}
Cependant il est possible d'écrire un algorithme sur une calculatrice programmable.

☑ *Savoir faire : Savoir écrire un algorithme pour calculer un terme d'une suite définie par récurrence :*

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\,u_n + 5$. Calcule u_{100}

Sur TI :

```
PROGRAM : SUITE
: Input "N=?",N
:3→Y
: For(I,0,N-1)
:2Y+5 →Y
: End
: Disp Y
```

```
PrgmSUITE
N=?100
1,014 x 10^31
Fait
```

Sur Casio :

```
======SUITE======
?→N↵
→Y↵
For 0→I To N-1↵
→Y↵
Next↵
Y◢
```

```
?
100
-Disp-
```

Remarque : On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Calcule les cinq premiers termes de cette suite.

$U_2 = U_1 + U_0 = 1 + 1 = 2$

$U_3 = U_2 + U_1 = 3$

$U_4 = U_3 + U_2 = 5$

$U_5 = U_4 + U_3 = 8$

Remarque : On considère la suite (u_n) définie par : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n$.

(U_n) est définie en fonction de n, mais on peut la définir aussi par récurrence : $U_{n+1} = U_n + (n+1)$

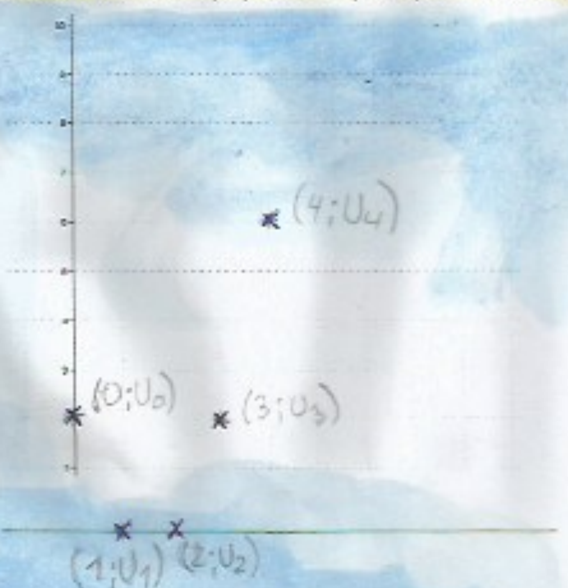
III. Représentation graphique d'une suite :

Définition

Dans un repère du plan, on représente une suite (u_n) par le nuage de points de coordonnées (n ; u_n).

☑ *Savoir faire : Savoir représenter graphiquement une suite numérique :*

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 3n + 2$. Représenter la suite (u_n).



	A	B
1	n	Un=n²-3n+2
2	0	2
3	1	0
4	2	0
5	3	2
6	4	6
7	5	
8	6	
9	7	
10	8	
11	9	
12	10	
13		

$= A_2^2 - 3 \times A_2 + 2.$

IV. Sens de variation d'une suite numérique.

On considère la suite (u_n) définie par : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 3n + 2$. En observant sa représentation graphique, on remarque que u_0 > u_1, u_1 = u_2, u_2 < u_3, u_3 < u_4.

On a l'impression que pour n ...... On a toujours u_{n+1} ...... u_n. Peut-on le prouver ?

Comparons U_{n+1} et U_n pour $n \geq 2$
$U_{n+1} = (n+1)^2 - 3(n+1) + 2 = n^2 - n$
$U_n = n^2 - 3n + 2$

$U_{n+1} - U_n = (n^2 - n) - (n^2 - 3n + 2) = 2n - 2$
Donc pour $n > 1$ $U_{n+1} - U_n > 0$
Donc pour $n \geq 2$ $U_{n+1} \geq U_n$

Définition

Soit un entier p et une suite numérique (u_n).

- On dit que la suite (u_n) est croissante à partir du rang p signifie que pour tout entier $n \geq p$, on a u_{n+1} > u_n.
- On dit que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p signifie que pour tout entier $n \geq p$, on a u_{n+1} < u_n.

☑ *Savoir faire : Savoir étudier les variations d'une suite :*

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 - 4n + 4$.

Démontrer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

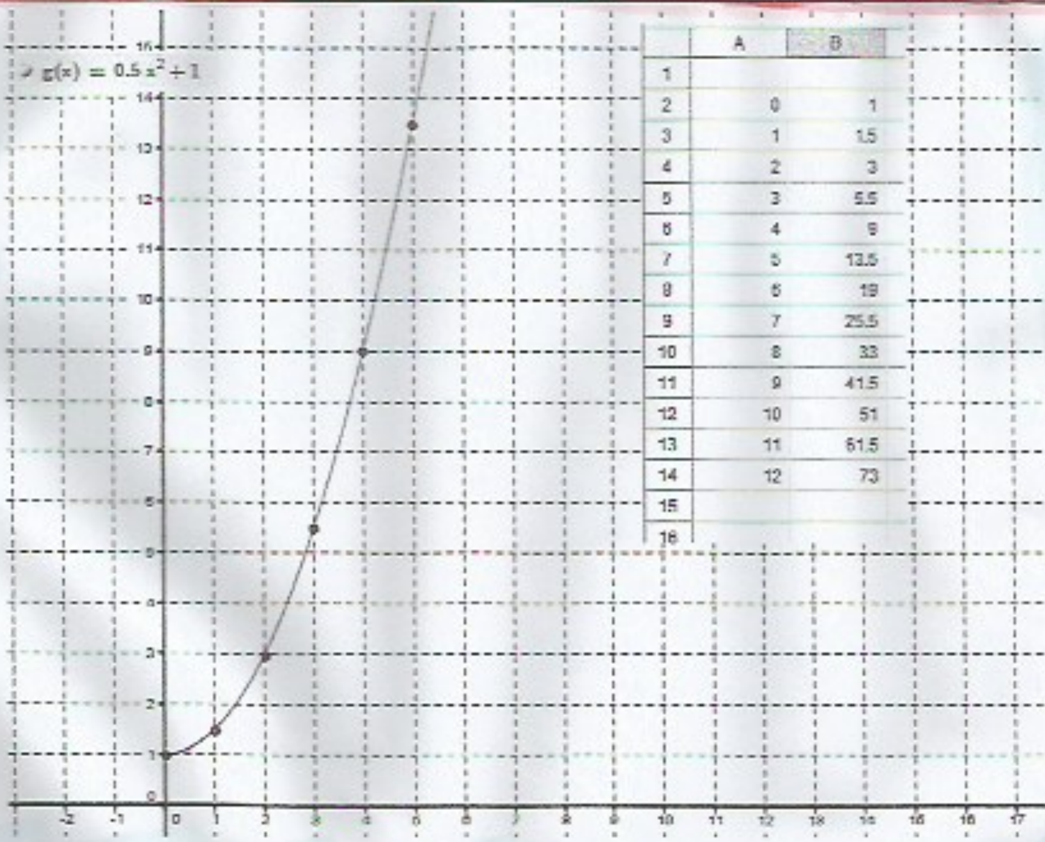
$U_n = n^2 - 4n + 4$
Etudions le signe de $U_{n+1} - U_n$
$U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 - 4(n+1) + 4 - n^2 + 4n - 4$
$= 2n - 3$

Donc $U_{n+1} - U_n \geq 0$ pour $n \geq 2$
Donc $U_{n+1} \geq U_n$ pour $n \geq 2$
Donc (U_n) est croissante à partir de 2

Propriété

Soit une fonction f définie sur [0 ; +∞ [et une suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$. Alors

- Si la fonction f est croissante sur [0 ; +∞ [alors la suite (u_n) est croissante.
- Si la fonction f est décroissante sur [0 ; +∞ [alors la suite (u_n) est décroissante.



	A	B
1		
2	0	1
3	1	1.5
4	2	3
5	3	5.5
6	4	9
7	5	13.5
8	6	19
9	7	25.5
10	8	33
11	9	41.5
12	10	51
13	11	61.5
14	12	73
15		
16		