Nom : ……………………..

Devoir de mathématiques n°7.

Durée du devoir : 2h, l'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice Ⅰ : Etude de fonction :

Partie 1 : Lecture graphique.(/ 2)

Partie 2 : Etude de fonction.(/ 4)

Partie 3 : Application économique.(/ 2)

Exercice ⅠⅠ : Suites numériques :

Partie 1 : Comparaison de deux suites.(/ 4)

Partie 2 : une suite particulière.(/ 4)

Exercice ⅠⅠⅠ : Statistiques : (/4)

Exercice I : Etude de fonction :

Partie 1 : Lecture graphique.(/ 2)

On considère la courbe C_f ci-dessous, représentant une fonction f définie sur IR. A et B sont deux points de C_f, $\mathbf{T_A}$ et $\mathbf{T_B}$ les tangentes respectives à C_f en ces points.

1) Déterminer graphiquement f (-1) et f (1).
2) Déterminer graphiquement f '(-1) et f '(1).
3) Graphiquement, C_f admet-elle une autre tangente horizontale que $\mathbf{T_B}$
4) Etablir d'après le graphique le tableau de variations de f.

Partie 2 : Etude de fonction.(/ 4)

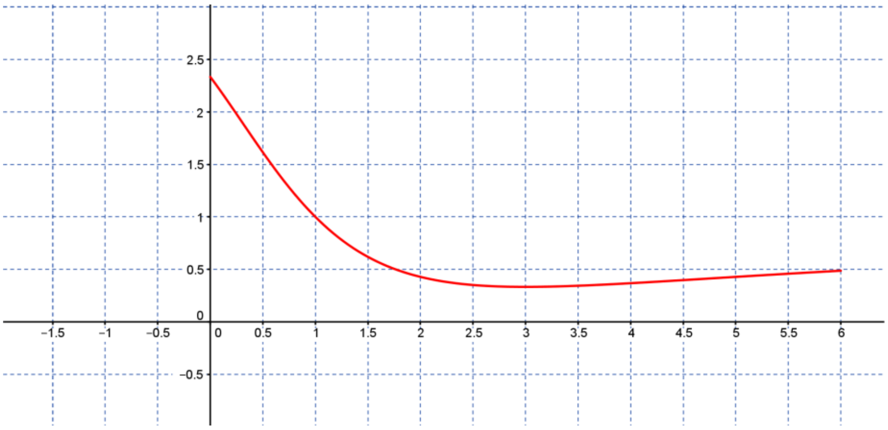
La fonction f définie dans la partie 1 a pour expression $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 + 3}$.

1) Déterminer par le calcul f (-1) et f (1).
2) Montrer que l'expression de f' est $f'(x) = \frac{4\,(x^2 - 2x - 3)}{(x^2+3)^2}$.
3) Déterminer par le calcul f '(-1) et f '(1).
4) Etudier le signe de g définie par $g(x) = x^2 - 2x - 3$.
5) En déduire le tableau de signe de $f'(x)$.
6) En déduire le tableau de variations de f.

Partie 3 : Application économique.(/ 2)

Une entreprise produit entre 0 et 600 objets. Son coût de production en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie sur [0 ; 6] par $C(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 + 3}$ pour x centaines d'objets.

On a représenté C



1) Déterminer le nombre d'objet à produire pour que le coût soit minimal.

2) Un objet est vendu 5 €, donner l'expression R(x) de la recette en fonction de x.

3) Représenter la fonction R dans le repère ci-dessus.

4) Déterminer graphiquement le nombre d'objet à produire pour avoir un bénéfice positif.

Exercice II : Suites numériques :

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1 : Comparaison de deux suites.(/ 4)

On souhaite comparer deux placements :
- placement A : dépôt initial de 500 € et un versement mensuel de 10 €;
- placement B : dépôt initial de 400 € et un versement mensuel de 5 % du capital placé.

On note a_n le capital en euros, obtenu par le placement A, et on note b_n le capital en euros, obtenu par le placement B, après n mois de versement. Ainsi $a_0 = 500$ et $b_0 = 400$.

1) **a.** Calculer a_1 et a_2.
b. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n ; quelle est la nature de la suite (a_n) ?
c. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
d. Calculer a_7 et interpréter le résultat.

2) **a.** Calculer b_1 et b_2.
b. Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n ; quelle est la nature de la suite (b_n) ?
c. En déduire l'expression de b_n en fonction de n.
d. Calculer b_7 et interpréter le résultat. (arrondir au centime d'euro)

3) Déterminer au bout de combien de mois le capital b_n devient supérieur au capital a_n.

Partie 2 : une suite particulière.(/ 4)

Le 1er janvier 2012, une grande entreprise compte 1500 employés. Une étude montre que lors de chaque année à venir, 10 % de l'effectif de l'entreprise partira à la retraite au cours de l'année.
Pour ajuster ses effectifs à ses besoins, l'entreprise embauche 100 jeunes dans l'année.
Pour tout entier naturel n, on appelle un le nombre d'employés de l'entreprise le 1er janvier de l'année (2012+n) ; $u_0 = 1500$.

1) **a.** Calculer u_1 et u_2.
b. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? (justifier par un calcul)
c. Expliquer pourquoi on a : $u_{n+1} = 0,9\, u_n + 100$ pour tout entier naturel n.

2). Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 1000$.
a. Calculer v_0, v_1 et v_2.
b. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
c. Exprimer alors v_n en fonction de n.
d. En déduire que $u_n = 500 \times (0,9)^n + 1000$ pour tout entier naturel n.

3) En déduire l'effectif de l'entreprise en 2030.

Exercice III : Statistiques : (/4)

Voici les notes sur 10 obtenues lors d'un contrôle par les 30 élèves d'une classe :

1 - 7 – 4 – 2 – 2 – 9 – 6 – 6 – 8 – 7 – 3 – 7 – 2 – 3 – 4 -7 – 5 – 7 – 8 – 1 - 0 – 3 – 4 – 6 – 7 – 10 – 6 – 5 – 3 – 7

1) Présenter ces données dans un tableau où figureront, pour chaque note de 0 à 10, les effectifs, les effectifs cumulés croissants et les fréquences en pourcentage.
(Arrondir les pourcentages à l'unité près).

2) **a.** Déterminer la moyenne $\bar{x}$ du devoir.
b. Déterminer la médiane, le 1er et le 3e quartile.
c. Représenter la série par un diagramme en boîte.

3) **a.** Calculer l'écart type σ, à 10^{-2} près.
b. Calculer (à 1 % près) le pourcentage d'élèves dont la note appartient à $[\bar{x} - \sigma ; \bar{x} + \sigma]$
c. Calculer (à 1 % près) le pourcentage d'élèves dont la note appartient à $[\bar{x} - 2\sigma ; \bar{x} + 2\sigma]$
d. Calculer (à 1 % près) le pourcentage d'élèves dont la note appartient à $[\bar{x} - 3\sigma ; \bar{x} + 3\sigma]$


Galileo Galilei.

« La nature est écrite en langage mathématique »
Galiléo Galiléi (1564 – 1642)