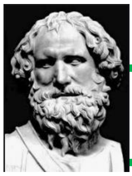
Arithmétique.



Ératosthène (-276 ; -194) *mathématicien, géographe, astronome et poète grec, il calcule la circonférence de la terre et un cible pour déterminer les nombres premiers.*

Dans tout ce chapitre les nombres considérés sont des entiers.

I. Multiples et diviseurs.

Définition : Soit a et b deux entiers relatifs. S'il existe un entier q tel que $a = bq$ alors on dit que a est un multiple de b et que b est un diviseur de a.

Exemple : $15 = 3 \times 5$ 15 est un multiple de 3 et de 5

5 et 3 sont des diviseurs de 15

On dit aussi que a est divisible *par b ou que b* divise *a.*

Propriété : La somme de deux multiples d'un entier a est un multiple de a.

Démonstration exigible :

Soit p_1 et p_2 deux multiples de a. alors $\exists n_1 \in \mathbb{N} / p_1 = a n_1$ et $\exists n_2 \in \mathbb{N} / p_2 = a n_2$

Donc $p_1 + p_2 = a \times n_1 + a \times n_2 = a(n_1 + n_2)$ Donc $p_1 + p_2$ est un multiple de a.

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre un problème avec des multiples ou des diviseurs:*

Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Soit n un nombre entier $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$

Donc $n + (n+1) + (n+2)$ est un multiple de 3.

II. Nombres pairs et impairs.

Définition : Soit a un entier relatif.

- On dit que a est un nombre pair s'il est divisible par 2. Il existe un entier relatif n tel que $a = 2n$.
- On dit que a est un nombre impair s'il n'est pas divisible par 2. Il existe un entier relatif n tel que $a = 2n + 1$.

Exemple : $14 = 2 \times 7$ est un nombre pair $35 = 2 \times 17 + 1$ est un nombre impair.

Propriété : Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration exigible :

Soit a un nombre impair alors a s'écrit sous la forme $a = 2n+1$

donc $a^2 = (2n+1)^2 = (2n+1)(2n+1) = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$ donc a^2 est un nombre impair

☑ *Savoir-faire : Savoir résoudre un problème avec des nombres pairs ou impairs :*

Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

deux entiers consécutifs s'écrivent sous la forme n et n+1

* Si n est pair $n = 2p$ $n \times (n+1) = 2p \times (2p+1) = 4p^2 + 2p = 2(2p^2 + p)$ pair

* Si n est impair $n = 2p+1$ $(2p+1)(2p+2) = 4p^2 + 6p + 2 = 2(2p^2 + 3p + 1)$ pair..

III. Nombres premiers.

Définition : On dit qu'un nombre entier naturel est premier s'il n'a que 2 diviseurs distincts : 1 et lui-même

Exemple : 2, 3, 5, 7 ... Voir le crible d'Eratosthène.
1 n'est pas premier, 2 est le seul nombre premier pair.

Définition : Deux nombres sont premiers entre eux lorsqu'ils n'ont pas de diviseurs commun autre que 1

Exemple :
diviseurs de 12 = {1; 2; 3; 4; 6; 12}
diviseurs de 18 = {1; 2; 3; 6; 9; 18}
12 et 18 ne sont pas premiers entre eux

☺ Décomposition d'un nombre en facteurs premiers.

Propriété : tout nombre se décompose de façon unique comme produit de facteurs premiers.

Exemple : $36 = 2\times18 = 2\times2\times9 = 2\times2\times3\times3 = 2^2\times3^2$

$300 = 3\times100 = 3\times2\times25 = 3\times2\times5\times5 = 2\times3\times5^2$

☺ Application : fraction irréductible.

Définition : On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

☑ *Savoir-faire : Savoir rendre une fraction irréductible:*

Rendre irréductible la fraction $A = \frac{60}{126}$.

On décompose le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers puis on simplifie

$60 = 2\times30 = 2\times3\times2\times5$

$126 = 2\times63 = 2\times3\times21 = 2\times3\times3\times7$

$$A = \frac{60}{126} = \frac{\cancel{2}\times2\times\cancel{3}\times5}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times3\times7} = \frac{10}{7}$$