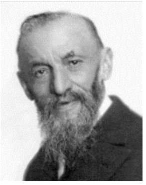
Raisonnement par récurrence.



*C'est au mathématicien italien **Giuseppe Peano** (1858 ; 1932) que l'on attribue le principe du raisonnement par récurrence. Le nom a probablement été donné par **Henri Poincaré** (1854 ; 1912).*

I. Définition.

Principe : On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file. Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent.

Définition : Une propriété est dite héréditaire à partir du rang n_0 si lorsque pour un entier $k \geq n_0$, la propriété est vraie, alors elle est vraie pour l'entier $k+1$.

Dans l'exemple, si on suppose qu'un domino k tombe alors le domino suivant $k+1$ tombe également.

Principe du raisonnement par récurrence :

Si une propriété P est : ♦ Vraie au rang n_0 (Initialisation),

♦ Héréditaire à partir du rang n_0 (Hérédité),

alors on peut affirmer que la propriété P est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

☑ Savoir-faire : Savoir démontrer par récurrence une propriété :

Démontrer que pour tout entier naturel n strictement positif, la propriété (P_n): $4^n + 5$ *est un multiple de* 3 est vraie

....

....

....

....

....

....

II. Exemples d'utilisation du raisonnement par récurrence :

☑ Savoir-faire : Savoir démontrer par récurrence l'expression générale d'une suite :

On considère la suite (u_n) *définie pour tout entier naturel* n *par* $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ *et* $u_0 = 1$.

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)^2$.

....

....

....

....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir démontrer par récurrence la monotonie d'une suite :*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

....

....

....

....

....

....

Inégalité de Bernoulli :
Soit un nombre réel a strictement positif, alors pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Démonstration exigible :

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Remarque :

L'initialisation est indispensable sinon on peut démontrer des propriétés fausses !

Soit P la propriété : « 2^n est divisible par 3 ».

....

....

....

....