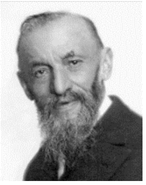
Raisonnement par récurrence.



*C'est au mathématicien italien **Giuseppe Peano** (1858 ; 1932) que l'on attribue le principe du raisonnement par récurrence. Le nom a probablement été donné par **Henri Poincaré** (1854 ; 1912).*

I. Définition.

Principe : On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file. Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent.

Définition : Une propriété est dite héréditaire à partir du rang n_0 si lorsque pour un entier $k \geq n_0$, la propriété est vraie, alors elle est vraie pour l'entier $k+1$.

Dans l'exemple, si on suppose qu'un domino k tombe alors le domino suivant $k+1$ tombe également.

Principe du raisonnement par récurrence :

Si une propriété P est : ♦ Vraie au rang n_0 (Initialisation),

♦ Héréditaire à partir du rang n_0 (Hérédité),

alors on peut affirmer que la propriété P est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

☑ Savoir-faire : Savoir démontrer par récurrence une propriété :

Démontrer que pour tout entier naturel n strictement positif, la propriété (P_n): $4^n + 5$ est un multiple de 3 est vraie.

On veut démontrer que : $\forall n \geq 1$, 4^n+5 est un multiple de 3, donc $4^n+5 = 3p$ (avec $p \in \mathbb{N}$)

* Initialisation : $n=1$ $4^1+5=9$ est un multiple de 3 Donc (P_1) est vraie.

* Hérédité : On suppose qu'il existe un nombre k pour lequel (P_k) est vraie, on veut montrer que (P_{k+1}) est vraie

(P_k): 4^k+5 est un multiple de 3 ; (P_{k+1}) : $4^{k+1}+5$ est un multiple de 3.

Si 4^k+5 est un multiple de 3

alors $\exists p /$ $4^k+5=3p$

Donc $4^k = 3p-5$

Donc $4 \times 4^k = 4 \times (3p-5)$

Donc $4^{k+1} = 12p-20$

Donc $4^{k+1}+5 = 12p-15 = 3(4p+5)$

Donc 4^{k+1} est un multiple de 3 Donc (P_{k+1}) est vraie.

La propriété (P_n) est initialisée et Héréditaire

Donc vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

II. Exemples d'utilisation du raisonnement par récurrence :

☑ Savoir-faire : Savoir démontrer par récurrence l'expression générale d'une suite :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$.

Démontrer par récurrence que : $\forall n \in$N, $u_n = (n+1)^2$.

* Initialisation : $n=0$ $(0+1)^2 = 1$ Donc la propriété est vraie au rang 1.

* Hérédité : On suppose qu'il existe un nombre k tel que $U_k = (k+1)^2$, Montrons que $U_{k+1} = (k+1+1)^2$

$U_k = (k+1)^2$

Donc $U_k + 2k + 3 = (k+1)^2 + 2k + 3$

Donc $U_{k+1} = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3$

Donc $U_{k+1} = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$

Donc la propriété est Héréditaire

Donc on peut affirmer que

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = (n+1)^2$

☑ *Savoir-faire : Savoir démontrer par récurrence la monotonie d'une suite :*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

(u_n) est croissante $\Leftrightarrow$ $\forall n$, $u_{n+1} \geq u_n$.

* Initialisation : $u_1 = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \geq u_0$
* Hérédité : On suppose $\exists k /$ $u_{k+1} \geq u_k$ Montrons que $u_{k+2} \geq u_{k+1}$

$u_{k+1} \geq u_k$

Donc $\frac{1}{3} u_{k+1} \geq \frac{1}{3} u_k$

Donc $\frac{1}{3} u_{k+1} + 2 \geq \frac{1}{3} u_k + 2$

Donc $u_{k+2} \geq u_{k+1}$

Donc on peut affirmer que $\forall n$, $u_{n+1} \geq u_n$

Donc (u_n) est croissante.

Inégalité de Bernoulli :

Soit un nombre réel a strictement positif, alors pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Démonstration exigible :

* initialisation : $n = 0$ $(1+a)^0 = 1$ $1 + 0 \times a = 1$ Donc la propriété est vraie pour $n = 0$
* Hérédité : On suppose qu'il existe un nombre k tel que $(1+a)^k \geq 1 + ka$

Montrons que $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$

$(1+a)^k \geq 1 + ka$

Donc $(1+a)(1+a)^k \geq (1+a)(1+ka)$ car $1+a > 0$

Donc $(1+a)^{k+1} \geq 1 + ka + a + ka^2$

Soit $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a + ka^2$

or $ka^2 \geq 0$

Donc $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire

Donc on peut affirmer qu'elle est vraie pour tout entier naturel n.

$\forall a > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Remarque :

L'initialisation est indispensable sinon on peut démontrer des propriétés fausses !

Soit P la propriété : « 2^n est divisible par 3 ».

* Hérédité : On suppose qu'il existe un nombre k tel que 2^k est un multiple de 3 ie $2^k = 3p$.

Montrons que 2^{k+1} est un multiple de 3.

$2^k = 3p$ Donc $2 \times 2^k = 2 \times 3p$ Donc $2^{k+1} = 3(2p)$ Donc 2^{k+1} est un multiple de 3.

cette propriété est héréditaire et pourtant elle n'est jamais vraie !!

l'initialisation ne fonctionne pas quelque soit le rang choisi ....