Baccalauréat S Liban 27 mai 2014

EXERCICE 4 5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population.
Un *individu sain* est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie.
Un *individu malade* est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri.
Un *individu guéri* est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri.
Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade.
Les premières observations nous montrent que, d'un jour au jour suivant :

- 5 % des individus tombent malades ;
- 20 % des individus guérissent.

Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience.
On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est à dire que $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$

1. Calculer a_1, b_1 et c_1.

2. **a.** Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant ? En déduire a_{n+1} en fonction de a_n.

b. Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.

On admet que $c_{n+1} = 0{,}2b_n + c_n$.

Pour tout entier naturel n, on définit $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1} \times A \times P$ et que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

3. **a.** Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.

On admet que, pour tout entier naturel n, $U_n = A^n \times U_0$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$D^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}95^n & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n) & 0{,}8^n & 0 \\ \dfrac{1}{3}(3 - 4 \times 0{,}95^n + 0{,}8^n) & 1 - 0{,}8^n & 1 \end{pmatrix}$

4. **a.** Vérifier que pour tout entier naturel n, $b_n = \dfrac{1}{3}(0{,}95^n - 0{,}8^n)$

b. Déterminer la limite de la suite (b_n).

c. On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroît.
On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est à dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum.
À cet effet, on utilise l'algorithme donné en **annexe 2** (***à rendre avec la copie***), dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n).
Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau fourni en **annexe 2**.
Conclure.

Exercice 4
Algorithme et tableau à compléter

```
Variables      : b, b', x, y sont des réels
                 k est un entier naturel
Initialisation : Affecter à b la valeur 0
                 Affecter à b' la valeur 0,05
                 Affecter à k la valeur 0
                 Affecter à x la valeur 0,95
                 Affecter à y la valeur 0,8
Traitement     : Tant que b < b' faire :
                    | Affecter à k la valeur k + 1
                    | Affecter à b la valeur b'
                    | Affecter à x la valeur 0,95x
                    | Affecter à y la valeur 0,80y
                    | Affecter à b' la valeur ......
                 Fin Tant que
Sortie         : Afficher ......
```

	k	b	x	y	b'	Test : $b < b'$?
Après le 7e passage dans la boucle Tant que	7	0,1628	0,6634	0,1678	0,1652	VRAI
Après le 8e passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le 9e passage éventuel dans la boucle Tant que						