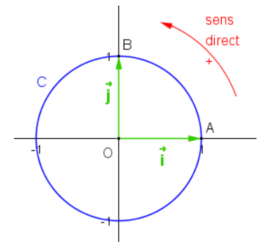
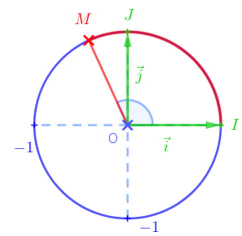
Fonctions trigonométriques.

Johannes Müller von Königsberg dit ***Régiomontanus (1436 ; 1476)*** *mathématicien allemand, ses traités sont à l'origine de la renaissance de la trigonométrie en Europe.*

I. Définition du radian.



Définition : Sur un cercle, on appelle <u>sens direct</u>, ou <u>sens trigonométrique</u> le sens contraire des aiguilles d'une montre.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ et orienté dans le sens direct, le <u>cercle trigonométrique</u> est le cercle de centre O et de rayon 1.



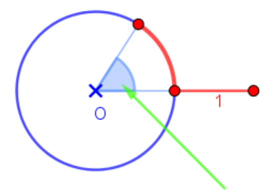
Propriété : Sur un cercle trigonométrique, la longueur de l'arc de cercle $\widehat{IM}$ (exprimée en unité de longueur du repère) est proportionnelle à la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ exprimée en degré.

....

....

....

Définition : On appelle radian, noté rad, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



Cet angle mesure 1 radian.

180 degré correspond à ..... radians(....)

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir convertir des mesures d'angles :*

1) Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 45°.

....

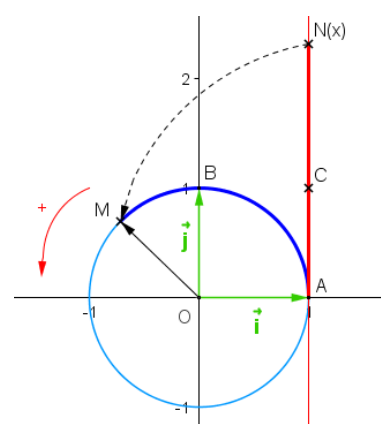
....

2) Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\frac{\pi}{6}$ rad.

....

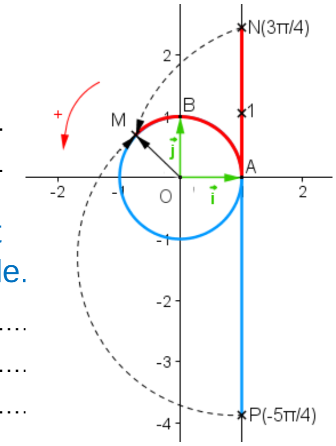
....

II. Enroulement de la droite des réels.



Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A;\vec{\jmath})$ soit un repère de la droite.
Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc .... est ainsi égale à la longueur ....
La mesure de l'angle .... en radian est égale à ....



Exemples : ....

....

....

A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle. La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle.

....

....

....

....

....

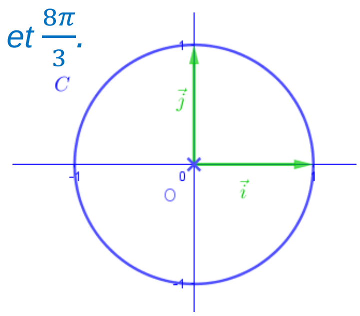
Propriété :

♦ Pour tout nombre réel α, le point d'abscisse α sur la droite coïncide avec un unique point M du cercle.

♦ A tout point M du cercle correspondent une infinité de valeurs qui peuvent être considérée comme des abscisses des points de la droite. Si α est une de ces valeurs, les autres peuvent s'écrire sous la forme ....

☑*Savoir-faire : Savoir placer un point sur le cercle trigonométrique :*

Placer sur le cercle trigonométrique, les points M et N qui correspondent à $\frac{9\pi}{4}$ *et* $\frac{8\pi}{3}$.



....

....

....

....

....

Définition : La mesure principale d'un angle orienté est **la mesure**, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer la mesure principale d'un angle :*

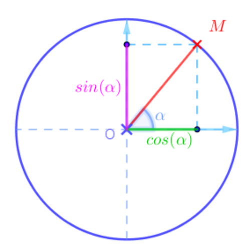
Donne la mesure principale de l'angle $\frac{27\pi}{4}$.

....

....

....

III. Cosinus et sinus d'un nombre réel.



Définition : Soit α un nombre réel, et M le point correspondant sur le cercle trigonométrique.

♦ Le cosinus du nombre réel α est l'abscisse de M et on note $\cos(\alpha)$.

♦ Le sinus du nombre réel α est l'ordonnée de M et on note $sin(\alpha)$.

Propriété : Pour tout nombre réel α, on a :

♦ ...... $\leq \cos(\alpha) \leq$ ...... ♦ ......$\leq \sin(\alpha) \leq$ ...... ♦ $cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) =$......

♦ $cos(\alpha + 2k\pi) =$....................., avec $k \in Z$. ♦ $sin(\alpha + 2k\pi) =$....................., avec $k \in Z$.

☺ Valeurs remarquables du cosinus et du sinus.

Propriété : $cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

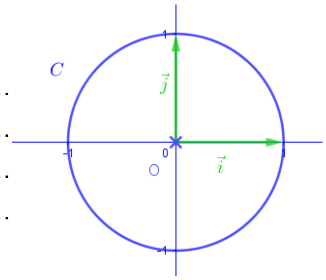
Démonstration exigible :

....

....

....

....



Propriété : $cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

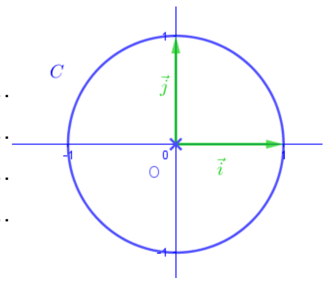
Démonstration exigible :

....

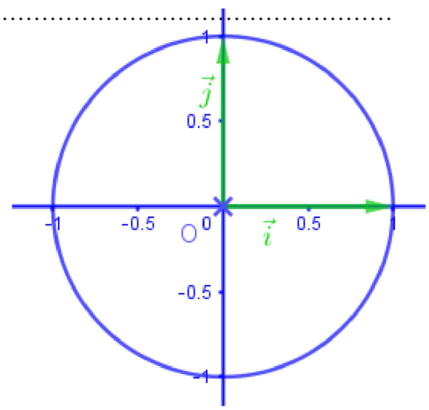
....

....

....



Valeurs remarquables						
x	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos (x)						
sin (x)						



☺ Mesures d'angles associés.

Pour tout nombre réel x, on a :

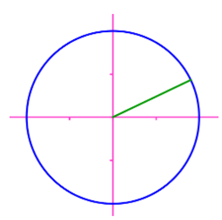
☺ $\cos(-x) =$........... ☺ $\sin(-x) =$ ....

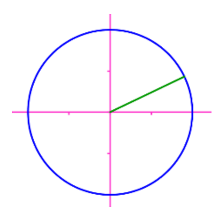
☺ $\cos(\pi + x) =$ .... ☺ $\sin(\pi + x) =$ ....

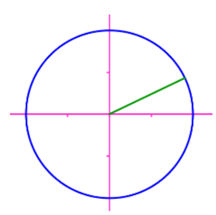
☺ $\cos(\pi - x) =$ .... ☺ $\sin(\pi - x) =$ ....

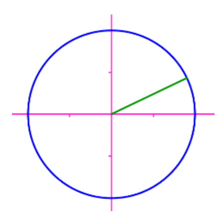
☺ $cos(\frac{\pi}{2} + x) =$ .... ☺ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$ ....

☺ $cos(\frac{\pi}{2} + x) =$ .... ☺ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$ ....









☑*Savoir-faire : Savoir résoudre une équation trigonométrique :*

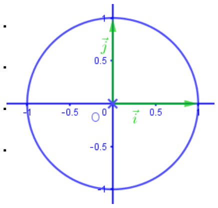
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : ☺ $\cos(x) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ☺ $\sin(x) = -0{,}5$.

....

....

....

....

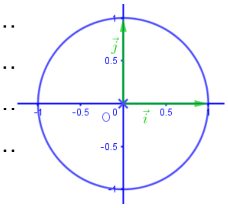


....

....

....

....



IV. Fonctions trigonométriques.

Définition :

- ♦ On appelle fonction cosinus, la fonction définie sur R par $cos : x \to cos(x)$.
- ♦ On appelle fonction sinus, la fonction définie sur R par $sin : x \to sin(x)$.

Propriété : Périodicité.

Pour tout x, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $sin(x + 2\pi) = sin(x)$.

Les fonctions cos et sin sont ....

....

....

Propriété : Parité.

Pour tout x, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $sin(-x) = sin(x)$.

- ♦ La fonction cos est .... sa courbe est ....
- ♦ La fonction sin est .... sa courbe est ....

....

....

x	
Variations de cos	

x	
Variations de sin