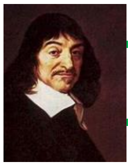
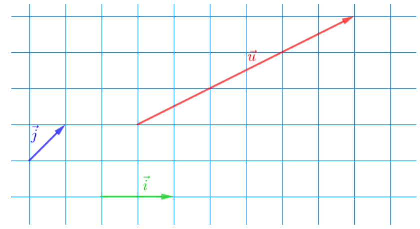
Géométrie analytique.



*La géométrie analytique ou cartésienne est introduite par **René Descartes (1596 - 1650),** elle permet de résoudre des problèmes de géométrie par des calculs avec l'utilisation d'un repère et de coordonnées.*

I. Repère du plan.

☺ Exprimer un vecteur en fonction de deux vecteurs non colinéaires.

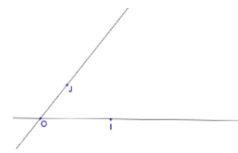


....
....
....
....
....

Définition : On appelle base du plan tout couple $(\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ de vecteurs non colinéaires.

Définition : Soit $(\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ une base du plan et $\vec{u}$ un vecteur.
Dire que $\vec{u}$ a pour coordonnée $(x\,;\,y)$ dans la base $(\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ signifie que $\vec{u} =$ ....

☺ Repère du plan.

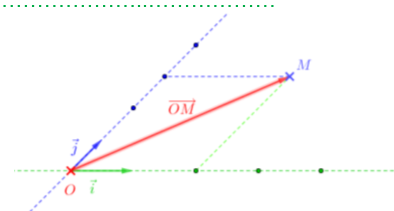


Un repère du plan est donné par un point O et une base du plan $(\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$.
Soient I et J tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$. Le repère (O ; I ; J) peut aussi s'écrire $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$

Définition : On appelle repère du plan tout triplet $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ où O est un point et $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont deux vecteurs non colinéaires. Le point O s'appelle ....

On dit que le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ est orthogonal si ....
On dit que le repère $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ est orthonornal si ....

☺ Coordonnées.



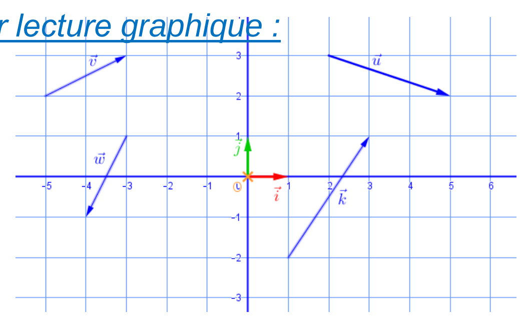
Définition : Soit $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Dire qu'un point M a pour coordonnées $(x\,;\,y)$ dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ signifie que $\overrightarrow{OM} =$ ....

....
....

Définition : Soit $(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath})$ un repère du plan et $\vec{u}$ un vecteur. Soit $M(x\,;\,y)$ le point tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Alors on dit que $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x\,;\,y)$ dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Remarque : ....
....

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur par lecture graphique :*



....
....
....
....
....

II. Vecteurs dans un repère du plan.

☺ Vecteurs défini par deux points.

Propriété : Soit $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan, $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points.

....

Démonstration : ....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur par calcul :*

Soit $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan, $A(2\,;\,1)$ $B(5\,;\,3)$ $C(-1\,;\,-2)$ $D(-2\,;\,3)$ $E(1\,;\,-4)$ et $F(4\,;\,-2)$.
Détermine par le calcul les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$.

....

....

....

☺ Propriétés.

Propriété : Soit $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan, $\vec{u}(x_{\vec{u}}\,;\,y_{\vec{u}})$ et $\vec{v}(x_{\vec{v}}\,;\,y_{\vec{v}})$ deux vecteurs et k un nombre.

♦ $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow$.............................   ♦ $\vec{u}+\vec{v}$.............................   ♦ $k\,\vec{u}$.............................

☑ *Savoir-faire : Savoir appliquer des formules sur les coordonnées d'un vecteur :*

Soit $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan, $A(2\,;\,1)$ $B(5\,;\,3)$ $C(-1\,;\,-2)$ $D(-2\,;\,3)$.
Détermine par le calcul les coordonnées de $3\,\overrightarrow{AB}$; $4\,\overrightarrow{CD}$ et $3\,\overrightarrow{AB}-4\,\overrightarrow{CD}$.

....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer les coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle :*

Soit $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan, $A(1\,;\,2)$ $B(-4\,;\,3)$ $C(1\,;\,-2)$.
Détermine par le calcul les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

....

....

....

III. Condition analytique de colinéarité.

☺ Déterminant de deux vecteurs.

Définition : Soit $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan et $\vec{u}(x_{\vec{u}}\,;\,y_{\vec{u}})$ et $\vec{v}(x_{\vec{v}}\,;\,y_{\vec{v}})$ deux vecteurs.
On appelle déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre :

$\det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix} x_{\vec{u}} & x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} & y_{\vec{v}} \end{vmatrix} =$..

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer le déterminant de deux vecteurs :*

Soit $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan, $\vec{u}(1\,;\,2)$ et $\vec{v}(-4\,;\,3)$ calcule $\det(\vec{u}\,;\,\vec{v})$.

....

....

☺ Condition analytique de colinéarité.

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

♦ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ♦ $\det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}\ ) = 0$.

Démonstration exigible :

……

……

……

……

……

……

☑ ***Savoir-faire : Savoir vérifier si deux vecteurs sont colinéaires :***

Soit $\vec{u}(1\ ;\ 2)$ et $\vec{v}(-4\ ;\ 3)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

……

……

☺ Application de la colinéarité.

☑ ***Savoir-faire : Savoir vérifier si deux droites sont parallèles ou non :***

Soit $A(-1\ ;\ 1)$; $B(3\ ;\ 2)$ $C(-2\ ;\ -3)$ et $D(6\ ;\ -1)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

……

……

……

☑ ***Savoir-faire : Savoir vérifier si trois points sont alignés ou non :***

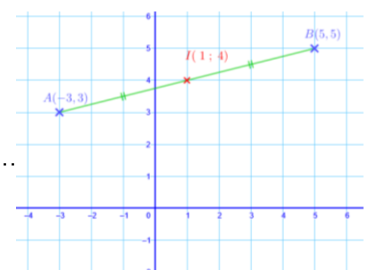
Soit $A(-1\ ;\ 1)$; $B(3\ ;\ 2)$ et $C(5;\ 0)$. Les points A,B et C sont-ils alignés ?

……

……

……

IV. Coordonnées du milieu d'un segment.



Propriété : Soit $(O\ ;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan, $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points.

……

☑ ***Savoir-faire : Savoir déterminer les coordonnées du milieu d'un segment :***

Soit $A(-1\ ;\ 1)$ et $B(3\ ;\ 2)$. Détermine les coordonnées de M, milieu de $[AB]$.

……

……

……

☑ ***Savoir-faire : Savoir déterminer les coordonnées du symétrique d'un point :***

Soit $A(-1\ ;\ 1)$ et $B(3\ ;\ 2)$. Détermine les coordonnées de A', symétrique de A par rapport à B.

……

……

……

V. Distance dans un repère orthonormé.

Propriété : Soit $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé, $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ deux points.

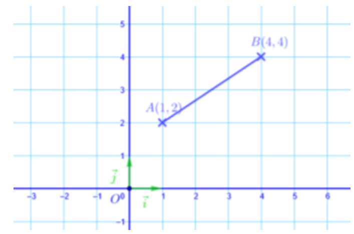
……………………………………………………………………………………………………

Démonstration : ……………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………



Attention : ………………………………………………………………………………………

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer une distance dans un repère orthonormé :*

Soit $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé, $A(-1\,;\,1)$ et $B(3\,;\,2)$. Calcule la distance AB.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Propriété : Soit $(O\,;\vec{\imath};\,\vec{\jmath})$ un repère orthonormé, $\vec{u}(x_{\vec{u}}\,;\,y_{\vec{u}})$ un vecteur.

……………………………………………………………………………………………………

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé :*

Soit $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé, $\vec{u}(-1\,;\,2)$ et $\vec{v}(3\,;\,-2)$. Calcule $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser les distances dans un repère orthonormé :*

Soit $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormé, $A(1\,;\,1)$; $B(3\,;\,3)$ et $C(7\,;\,-1)$. ABC est-il rectangle ?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Calcule la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………