100

Baccalauréat S Antilles/Guyane juin 2015

EXERCICE 4 — 5 points

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A

Pour deux entiers naturels non nuls a et b, on note $r(a,\ b)$ le reste dans la division euclidienne de a par b.
On considère l'algorithme suivant :

Variables :	c est un entier naturel
	a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées :	Demander a
	Demander b
Traitement :	Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Tant que $c \neq 0$
	Affecter à a le nombre b
	Affecter à b la valeur de c
	Affecter à c le nombre $r(a,\ b)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher b

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 26$ et $b = 9$ en indiquant les valeurs de a, b et c à chaque étape.
2. Cet algorithme donne en sortie le PGCD des entiers naturels non nuls a et b.
   Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux ou non.

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

On définit un procédé de codage de la façon suivante :
Étape 1 : on choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25.
Étape 2 : à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.
Étape 3 : on calcule l'entier x' défini par les relations

$$x' \equiv px + q \quad [26] \quad \text{et} \quad 0 \leqslant x' \leqslant 25.$$

Étape 4 : à l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Dans cette question, on choisit $p = 9$ et $q = 2$.
   a. Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.
   b. Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9u + 26v = 1$. Donner sans justifier un couple $(u,\ v)$ qui convient.
   c. Démontrer que $x' \equiv 9x + 2 \quad [26]$ équivaut à $x \equiv 3x' + 20 \quad [26]$.
   d. Décoder la lettre R.
2. Dans cette question, on choisit $q = 2$ et p est inconnu. On sait que J est codé par D.
   Déterminer la valeur de p (on admettra que p est unique).
3. Dans cette question, on choisit $p = 13$ et $q = 2$. Coder les lettres B et D. Que peut-on dire de ce codage ?*