

EXERCICE 1

6 points

Commun à tous les candidats

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif donné.

On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

- a. Soit c et d deux réels tels que $0 \leq c < d$.
Démontrer que la probabilité $P(c \leq X \leq d)$ vérifie $P(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$.
- b. Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $P(X > 20)$ soit égale à 0,05.
- c. Donner l'espérance de la variable aléatoire X

Dans la suite de l'exercice on prend $\lambda = 0,15$.

- d. Calculer $P(10 \leq X \leq 20)$.
- e. Calculer la probabilité de l'évènement $(X > 18)$.
2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart type 1,95.
- a. Calculer la probabilité de l'évènement $(20 \leq Y \leq 21)$.
- b. Calculer la probabilité de l'évènement $(Y < 11) \cup (Y > 21)$.

Partie 2

Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.

Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.

Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à 0,067 ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.

De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à 0,015 et 0,010 ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

- Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.
- Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut 0,057.

Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3. Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 €.

Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne.

Ses doutes sont-ils justifiés ?*