

EXERCICE 3

5 points

1. Résoudre dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.
- Calculer le module et un argument du nombre a .
 - Donner la forme exponentielle des nombres a et b .
 - Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle \mathcal{C} de centre O dont on déterminera le rayon.
 - Placer les points A, B et C dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2. d. complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A' , B' et C' d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.
- Montrer que $b' = 8$.
 - Calculer le module et un argument du nombre a' .

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\frac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.
- On note r , s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.
Calculer r et s . On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i(2 + 2\sqrt{3})$.
 - Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST? Justifier ce résultat.*