107

Bac S Pondichéry 22 avril 2016

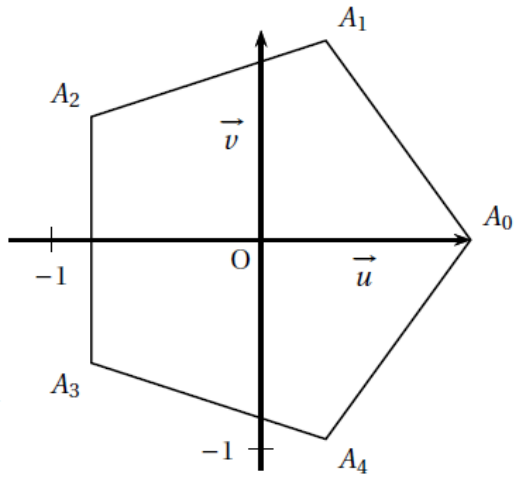
EXERCICE 2 — 3 points

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, de centre O tel que $\overrightarrow{OA_0} = \vec{u}$.

On rappelle que dans le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, ci-contre :

- les cinq côtés sont de même longueur ;
- les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 appartiennent au cercle trigonométrique ;
- pour tout entier k appartenant à $\{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ on a $\left(\overrightarrow{OA_k} ; \overrightarrow{OA_{k+1}}\right) = \frac{2\pi}{5}$.



1. On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\frac{i}{2}$.

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$ coupe le segment $[BJ]$ en un point K.

Calculer BJ, puis en déduire BK.

2. a. Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2. Justifier brièvement.

b. Démontrer que $BA_2{}^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

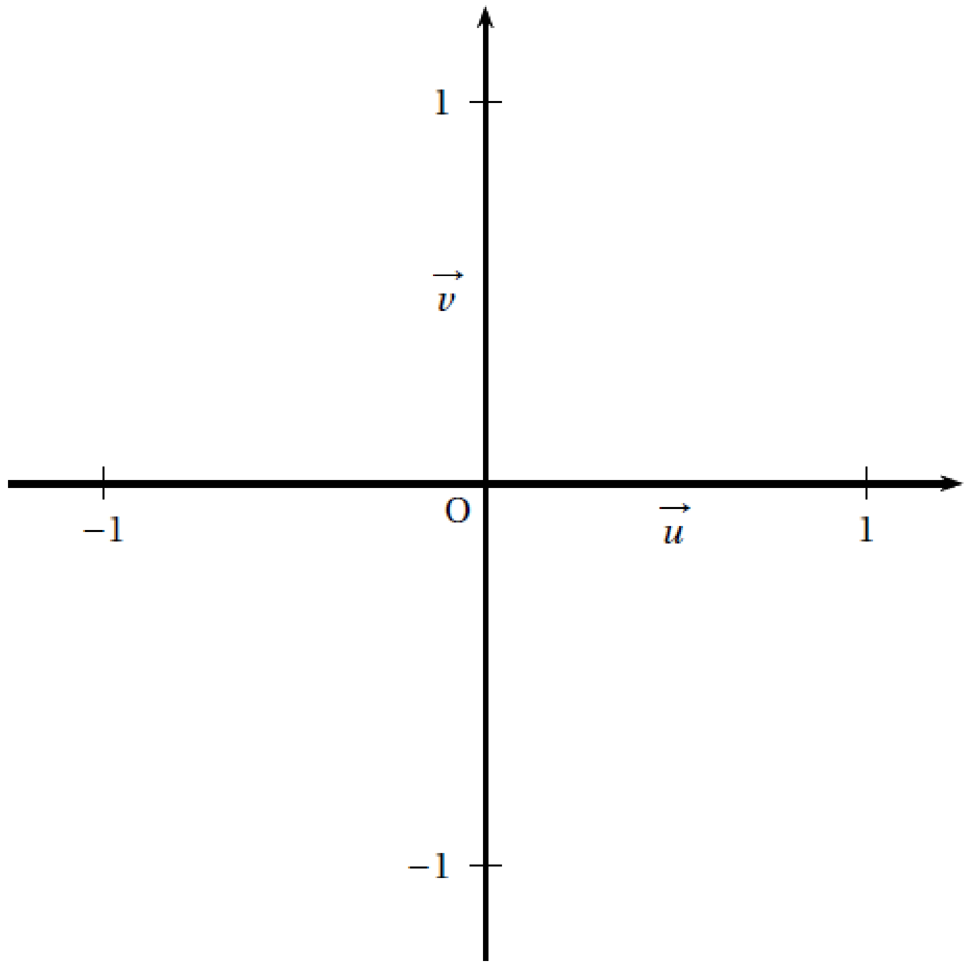
c. Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification :

▶ Calcul formel	
1	cos (4*pi/5)
	$\rightarrow \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)$
2	sqrt((3 - sqrt(5))/2)
	$\rightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$

« sqrt »signifie « racine carrée »

En déduire, grâce à ces résultats, que $BA_2 = BK$.

3. Dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ donné en annexe, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.*


1
$\vec{v}$
O
-1
$\vec{u}$
1
-1