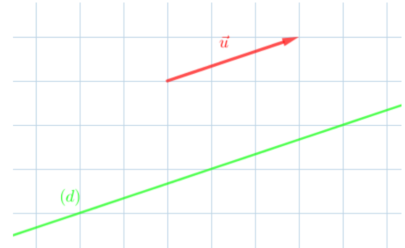
Équations de droites.

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) *« Tant que l'Algèbre et la Géométrie ont été séparées, leurs progrès ont été lents et leurs usages bornés ; mais lorsque ces deux sciences se sont réunies, elles se sont prêtées des forces mutuelles et ont marché ensemble d'un pas rapide vers la perfection. »*

I. Vecteur directeur d'une droite.

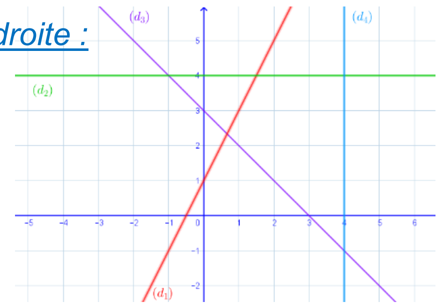


Définition : Soit (d) une droite du plan.
On appelle vecteur directeur de (d) tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite (d).

Remarque : ....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite :*



Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.

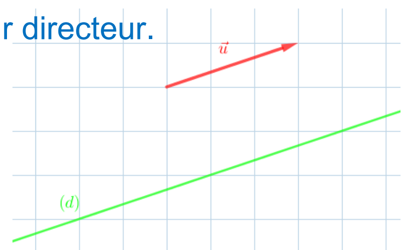
Donner des vecteurs directeurs des droites (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4).

....

....

....

Propriété : Une droite peut être définie par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur.
La droite qui passe par A et qui a pour vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que : les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont ....



....

....

II. Équation cartésienne d'une droite.

Propriété : Soit (d) une droite. Il existe a , b et c trois nombres $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ tels que :
Tous les points $M(x\,;y)$ de (d) ont leur coordonnées qui vérifient l'équation (E): $ax + by + c = 0$.
Cette équation est appelée équation cartésienne de la droite (d).
$\vec{u}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de (d).

Démonstration exigible :

....

....

....

....

....

....

Exemple : Soit une droite (d) d'équation cartésienne $4x - 5y - 1 = 0$. Alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (;) est un vecteur directeur de (d).

....

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer une équation cartésienne de droite :*

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $A(3\,;\,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1\,;\,5)$.

....

....

....

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par$B(5\,;\,3)$ et $C(1\,;\,-3)$

....

....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir vérifier si un point appartient à une droite :*

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.

Les points $A(3\,;\,1)$ et $B(-2\,;\,4)$ appartiennent-ils à la droite (d) d'équation cartésienne $2x+3y-9=0$.

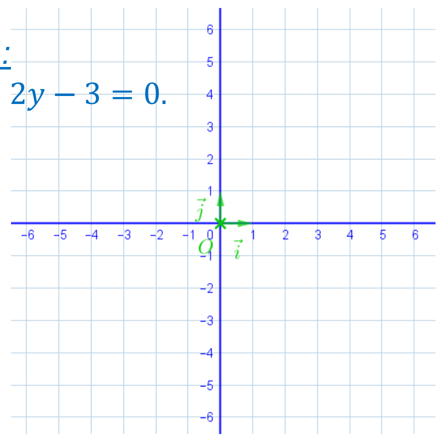
....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir construire une droite avec une équation cartésienne :*

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan. Construire la droite (d) d'équation cartésienne $x+2y-3=0$.



....

....

....

....

....

....

III. Équation réduite d'une droite.

☺ Droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Propriété : Soit (d) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$

Si $b=0$, alors (d) est paralléle à l'axe des ordonnées et admet une équation de la forme $x=k$, $k\in R$.

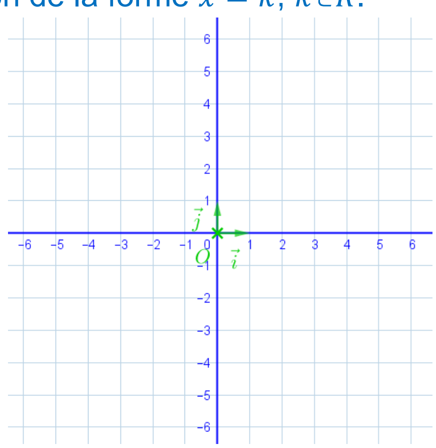
Cette équation est appelée équation réduite de (d).

Exemple : Soit (d) la droite d'équation cartésienne $2x-6=0$.

Alors (d) a pour équation réduite ....

Tous les points de (d) ont ....

Un vecteur directeur de (d) est ....



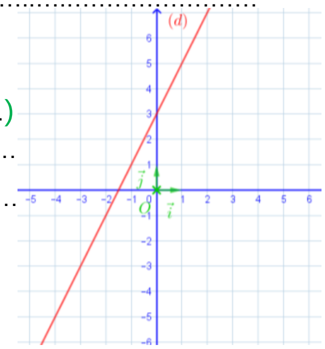
....

....

....

☺ Droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

Propriété : Soit (d)une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, avec $b \neq 0$.
alors (d) admet une **unique** équation, appelée équation réduite, de la forme $y = mx + p$.
m s'appelle la .... ou le .... et p s'appelle ....

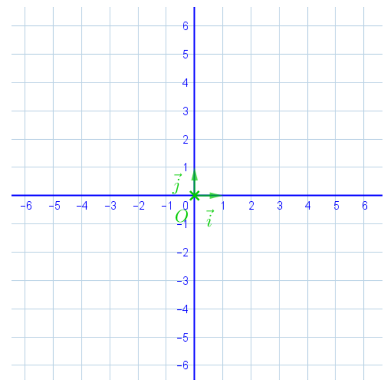


Exemple : Soit (d) la droite d'équation cartésienne $4x - 2y + 6 = 0$.
Alors (d) a pour équation réduite .... (donc $m =$ ....et $p =$...........)
Un vecteur directeur de (d) est ....
....

Propriété : Soit (d) une droite d'équation réduite $y = mx + p$.
Alors le vecteur $\vec{u}$ .... est un vecteur directeur de (d).

☑ *Savoir-faire : Savoir construire une droite avec une équation cartésienne :*

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan.
Construire les droites $(d_1) : y = 2x + 3$; $(d_2) : y = 4$ et $(d_3) : x = 3$

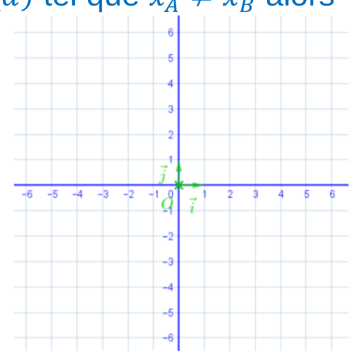


....
....
....
....
....
....

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer l'équation réduite d'une droite connaissant une équation cartésienne :*

Donne les équations réduites des droites $(d_1) : 5x - 10 = 0$; $(d_2) : 2y - 5 = 0$ et $(d_3) : 2x + 3y - 5 = 0$
....
....
....

Propriété : Soit $A(\,x_A\,;\,y_A\,)$ et $B(\,x_B\,;\,y_B\,)$ deux points distincts d'une droite (d) tel que $x_A \neq x_B$ alors
la droite (d) a pour pente (ou coefficient directeur) $m =$ ....



Remarque : ....
....
....
....
....

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer l'équation réduite d'une droite avec deux points :*

Soit $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Déterminer l'équation réduite de la droite passant par $A(4\,;\,-1)$ et $B(3\,;\,5)$.
....
....
....
....

IV. Positions relatives de deux droites.

☺ Droites parallèles.

Propriété : Deux droites sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs ....

☑ *Savoir-faire : Savoir démontrer que deux droites sont parallèles :*

Démontrer que les droites $(d_1): 6x - 10y - 5 = 0$ et $(d_2): -9x + 15y = 0$.

....

....

....

....

Propriété : Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont le même ....

☺ Droites sécantes.

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer les coordonnées du point d'intersection de 2 droites :*

Détermine les coordonnées du point d'intersection de $(d_1): -2x + y = 0$ et $(d_2): 4x - y = 4$.

....

....

....

....

....

....

....

....

Définition : On appelle déterminant du système $(S): \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ le nombre $det(S) = ab' - ba'$.

Remarque : ....

....

....

....

....

....

....

....

....

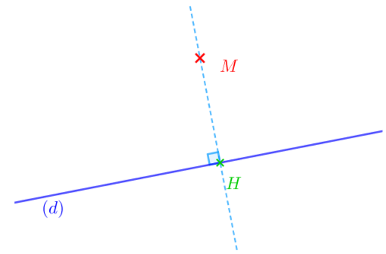
....

....

....

....

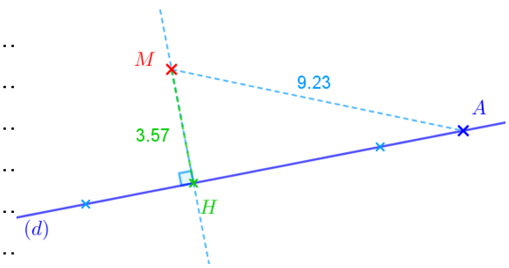
V. Projeté orthogonal d'un point sur une droite.



Définition : Soit (d) une droite et M un point du plan.
Le projeté orthogonal du point M sur la droite (d) est le point d'intersection H de la droite (d) avec la perpendiculaire à (d) passant par M.

Propriété : Le projeté orthogonal du point M sur la droite (d) est le point de la droite (d) le plus proche du point M.

Démonstration exigible :

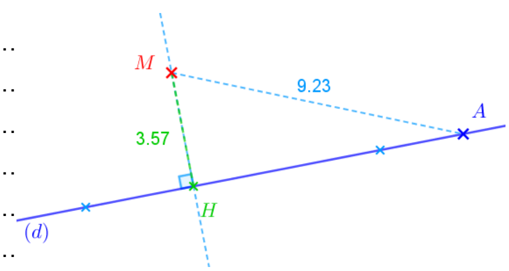


………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………

☺ Application à la trigonométrie.

Propriété : Dans un triangle rectangle, si α est une mesure d'un angle aigu alors
$cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1$

Démonstration exigible :



………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………………