Primitives et équations différentielles.

__Florimond de Beaune__ (1601 ; 1652) juriste et mathématicien français, disciple et ami de Descartes, il propose en 1638 des problèmes nommés « inverses des tangentes ».

I. Primitive d'une fonction continue.

☺ Définition.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir prouver qu'une fonction donnée est une primitive :*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - (x+1)e^{-x}$.

Prouve que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x + (x+2)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

....

....

....

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque :
Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue.
Par exemple, la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Propriété : Soit f est une fonction continue sur un intervalle $\mathbb{I}$.
Si F est une primitive de f sur I alors $\forall\, k \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto F(x) + k$ est une primitive de f sur $\mathbb{I}$.

....

....

Propriété : Deux primitives d'une même fonction continue sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration exigible :

....

....

☺ Primitive particulière.

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathbb{I}$.
$\forall x_0 \in \mathbb{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une .... primitive G de f sur $\mathbb{I}$ telle que $G(x_0) = y_0$.

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer une primitive particulière :*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$par $f\ (x) = \frac{(2x-1)e^{2x}}{x^2}$. Prouve que la fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \frac{e^{2x}}{x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, puis déterminer la primitive f qui s'annule en $x_0 = 1$.

....

....

....

....

....

II. Primitives et opérations.

☺ Primitives des fonctions de références.

Fonction : $f : x \to$.......	Une primitive $F : x \to$.......	Sur l'intervalle
k (constante réelle)		
x^n ($\forall\ n \in \mathbb{N}^*$)		
$\frac{1}{x^2}$		
$\frac{1}{x^n}$ ($\forall$ n >1)		
$\frac{1}{x}$		
$\frac{1}{\sqrt{x}}$		
e^x		
$\cos(x)$		
$sin(x)$		

☺ Opérations sur les primitives.

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $\mathbb{I}$.
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur I alors :
☺ .... est une primitive de $f + g$ sur $\mathbb{I}$.
☺ Pour tout réel k, ... est une primitive de kf sur $\mathbb{I}$.

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer l'expression d'une primitive:*

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

☺ $f(x) = x^3 - 2x$ sur $I = \mathbb{R}$ ☺ $f(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3}$ sur I =] 0 ; +∞[

....

....

....

....

....

☺ Primitives de fonctions composées.

Soit u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

Fonction f de la forme	Une primitive F	condition
$u'u^n$		
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$		
$\frac{u'}{u^2}$		
$u'e^u$		
$u'\cos(u)$		
$u'\sin(u)$		
$u' \times (v' o\, u)$		

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer l'expression d'une primitive de fonction composée :*

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

☺ $f(x) = x^2\, e^{x^3}$ ☺ $f(x) = \cos(5x) - 3\sin(3x-1)$ ☺ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

....

....

....

....

....

....

III. Équations différentielles.

☺ Définition.

Définition : Une équation différentielle est une égalité reliant une fonction dérivable et sa dérivée.

Définition : Une solution d'équation différentielle est une fonction qui vérifie cette égalité.

☺ Équation différentielle (E): $y' = f$.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathbb{I}$.
☺ On dit que la fonction F est une solution de l'équation différentielle (E): $y' = f$ sur I lorsque F est dérivable sur $\mathbb{I}$ et, pour tout réel x de $\mathbb{I}$, on a : $F'(x) = f(x)$.
☺ Résoudre l'équation différentielle (E): $y' = f$, c'est trouver toutes les fonctions F dérivables sur $\mathbb{I}$ telles $F' = f$.

Remarque :
☺ F est une primitive de $f \Leftrightarrow F$ est une solution de l'équation différentielle ....
☺ Résoudre l'équation différentielle $y' = f$, c'est trouver toutes les ....

☑*Savoir-faire : Savoir vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle :*

Prouve que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ sur par $F(x) = 3x^2 + 2x+5$ est solution de (E): $y' = 6x + 2$

………

………

………

………

☺ Équation différentielle (E): $y' = a\,y$.

Propriété : Soit a un nombre réel non nul.
Les solutions de l'équation différentielle (E) : $y' = a\,y$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto k\,e^{ax}$, où k est une constante réelle quelconque.

Démonstration exigible :

………

………

………

………

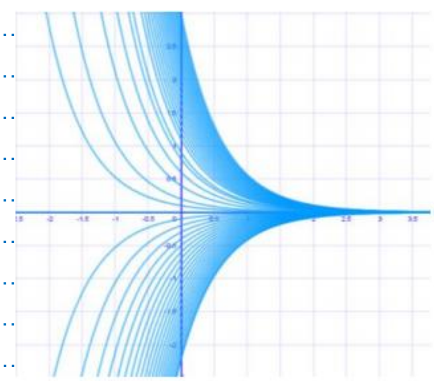
………

………

☑*Savoir-faire : Savoir résoudre une équation différentielle du type (E): $y' = a\,y$:*

On considère l'équation différentielle (E): $3y' + 5y = 0$.

Détermine la forme générale des solutions de l'équation, puis l'unique solution telle que $y(1) = 2$.



…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

Propriété : Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle (E): $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$,
alors $f + g$ et kf, $k \in \mathbb{R}$, sont également solutions de (E).

………

………

………

………

………

☺ Équation différentielle (E): $y' = a\,y + b$.

Propriété : Soit a et b deux réels non nul et l'équation différentielle (E) : $y' = a\,y + b$.
☺ (E) admet une unique solution particulière constante qui est la fonction $x \longmapsto -\frac{b}{a}$
☺ Les solutions de (E) sont les fonctions $x \longmapsto k\,e^{ax} - \frac{b}{a}$, où k est une constante réelle.
☺ Pour tous nombres réels x_0 et y_0 , l'équation (E) admet une unique solution vérifiant $f(x_0) = y_0$.

....
....
....

☑*Savoir-faire : Savoir résoudre une équation différentielle du type* (E): $y' = a\,y + b$ *:*

On considère l'équation différentielle (E): $2y' - y = 3$.

Détermine la forme générale des solutions de l'équation, puis l'unique solution telle que $y(0) = -1$.

....
....
....
....

☺ Équation différentielle (E): $y' = a\,y + f$.

Propriété : Soit a et b deux réels non nul et l'équation différentielle (E) : $y' = a\,y + b$.
Soit a un nombre réel et f une fonction définie sur un intervalle $\mathbb{I}$.
Soit (E) l'équation différentielle (E): $y' = ay + f$ et g une solution particulière de (E) sur I.
Les solutions de (E) sur I sont les fonctions $x \longmapsto x \longmapsto k\,e^{ax} + g(x)$, où k est une constante réelle.

☑*Savoir-faire : Savoir résoudre une équation différentielle du type* (E): $y' = a\,y + f$ *:*

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = x^2$

Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution particulière de (E),

En déduire la forme générale de toutes les solutions de (E).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....