Produit scalaire.

Le concept de produit scalaire a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand ***Hermann Grassmann (1809 ; 1877)***

I. Produit scalaire.

☺ Norme d'un vecteur.

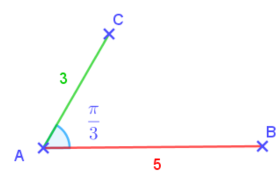
Définition : Une unité de longueur étant choisie, la norme d'un vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est la distance AB.
On note $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Conséquences :
- ♦ $\|\overrightarrow{AB}\| = 0$ équivaut à ....
- ♦ Pour tout nombre λ et tout vecteur $\vec{u}$, on a $\|\lambda\, \vec{u}\| =$ ....
- ♦ Dans un repère orthonormé si $\vec{u}\ (x\,;y)$, alors ....

☺ Définition du produit scalaire.

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, A, B et C des points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle produit scalaires des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le nombre réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et défini par :
- ♦ Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
- ♦ Sinon, $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.

☑*Savoir-faire : Savoir calculer un produit scalaire :*



1) Calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

....

....

2) ABC *est un triangle équilatéral de longueur de côté* a*, Calcule* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

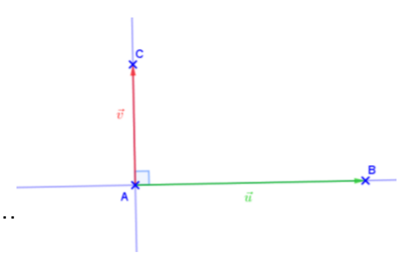
....

....

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires non nuls
- ♦ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, $\vec{u}.\vec{v} =$..................................
- ♦ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraire, $\vec{u}.\vec{v} =$..................................

Propriété : Le produit scalaire est symétrique,
Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}.\vec{v} =$..................................

II. Produit scalaire et orthogonalité.



Définition : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont dits orthogonaux si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Propriété : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} =$.............................

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

♦ $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) =$.. ♦ $\vec{u}.(\lambda\vec{v}) =$..

☺ Application :

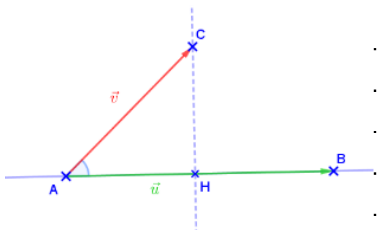
Propriété : Soit A, B et C trois points (A et B distincts) et H projeté orthogonal de C sur (AB).

♦ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de même sens, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$ ....

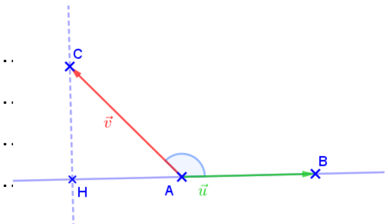
♦ Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire, alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} =$ ....

Démonstration :

....
....
....
....
....



....
....
....
....
....



III. Produit scalaire et norme.

Propriété : Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^{\,2} = \|\vec{u}\|^2$.

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

♦ $(\vec{u}+\vec{v})^2 =$..................... ♦ $(\vec{u}-\vec{v})^2 =$.................. ♦ $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) =$............................

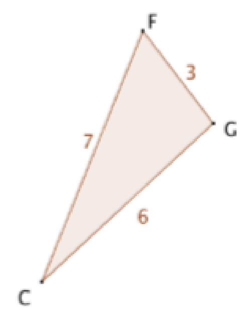
Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

♦ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$.

☑*Savoir-faire : Savoir calculer un produit scalaire avec des normes :*

Calcule $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}$.

....
....
....
....

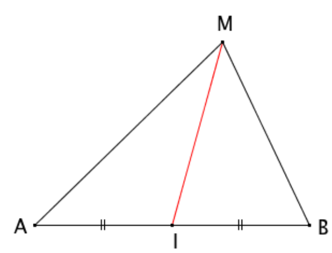


IV. Applications du produit scalaire.

☺ Théorème de la médiane.

Propriété : Soit deux points A et B et I le milieu du segment [AB].

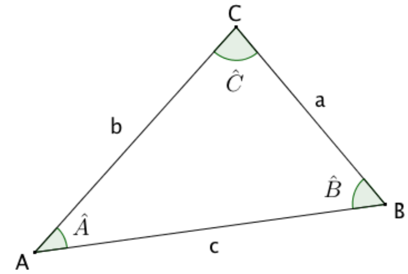
Pour tout point M, on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$



Démonstration :

....
....
....

☺ Théorème d'Al Kashi.



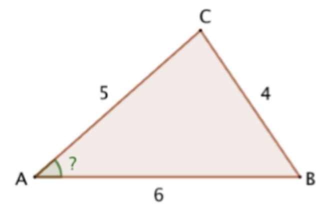
Propriété : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :
On a $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$

Démonstration exigible :

………
………

☑*Savoir-faire : Savoir appliquer le théorème d'Al Kashi:*

On considère la figure ci-contre, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

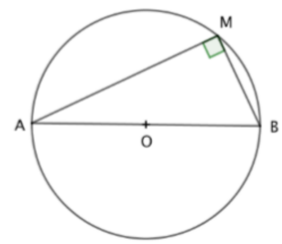


………
………
………
………

☺ Caractérisation du cercle.

Propriété : Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.

Démonstration exigible :



………
………
………

V. Produit scalaire dans un repère orthonormé.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,)$.

Propriété : Soit $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ deux vecteurs. Alors : $\vec{u}.\vec{v} =$……………………………………………

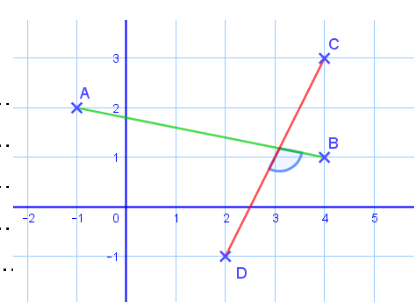
☑*Savoir-faire : Savoir calculer un produit scalaire à l'aide des coordonnées :*

Soit $\vec{u}(5\,;-4)$ et $\vec{v}(-3\,;7)$. Calcule $\vec{u}.\vec{v}$.

………
………

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer un angle à l'aide du produit scalaire :*

Calculer la mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}}\right)$ au degré près.



……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……
……