Baccalauréat S Pondichéry 22 avril 2016

EXERCICE 5 **5 points**

On souhaite stériliser une boîte de conserve.
Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25\,°\text{C}$ et on la place dans un four à température constante $T_F = 100\,°\text{C}$.
La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85 °C.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

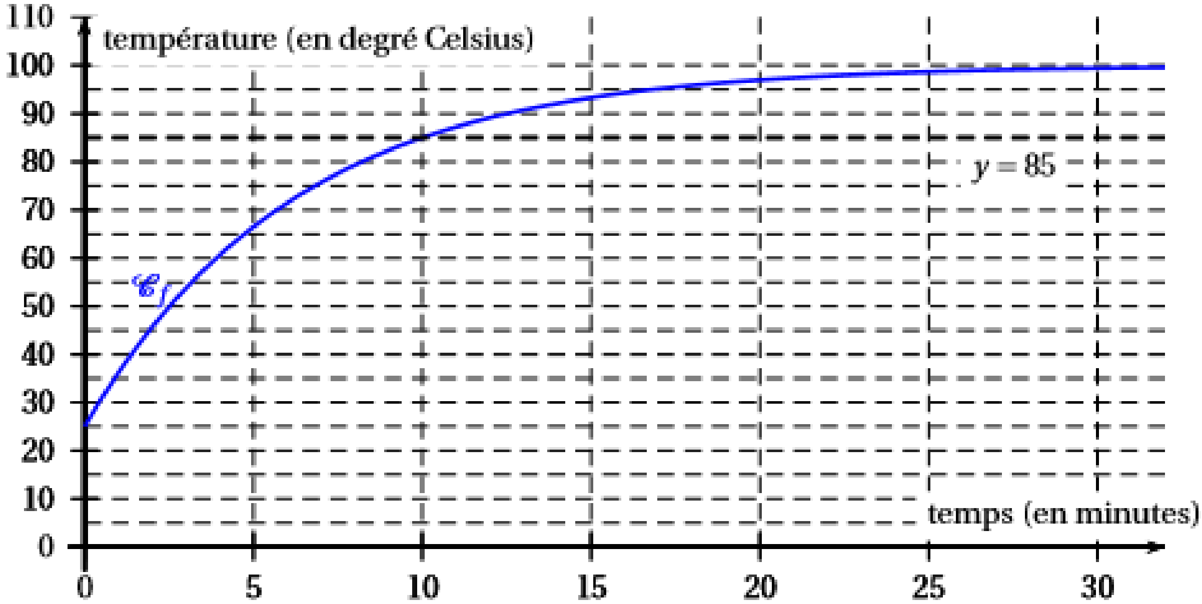
1. Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes.
   Arrondir à l'unité.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
3. Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-t-elle ?

Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.
On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

$$f(t) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

1. **a.** Étudier le sens de variations de f sur $[0~;~+\infty[$.
   b. Justifier que si $t \geqslant 10$ alors $f(t) \geqslant 85$.
2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.
   On note $\mathscr{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$, $y = 85$ et la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.
   On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathscr{A}(\theta)$ est supérieure à 80.



a. Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe, que l'on a $\mathscr{A}(25) > 80$.

b. Justifier que, pour $\theta \geqslant 10$, on a $\mathscr{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t$.

c. La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?*