

EXERCICE 5

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère les matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres entiers.

Le nombre $3a - 5b$ est appelé le déterminant de M . On le note $\det(M)$.

Ainsi $\det(M) = 3a - 5b$.

1. Dans cette question on suppose que $\det(M) \neq 0$ et on pose $N = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$.

Justifier que N est l'inverse de M .

2. On considère l'équation (E) : $\det(M) = 3$.

On souhaite déterminer tous les couples d'entiers $(a; b)$ solutions de l'équation (E).

- a. Vérifier que le couple $(6; 3)$ est une solution de (E).
- b. Montrer que le couple d'entiers $(a; b)$ est solution de (E) si et seulement si $3(a - 6) = 5(b - 3)$.

En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Partie B

1. On pose $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

En utilisant la partie A, déterminer la matrice inverse de Q .

2. *Codage avec la matrice Q*

Pour coder un mot de deux lettres à l'aide de la matrice $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ on utilise la procédure ci-après :

Étape 1 : On associe au mot la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 est l'entier correspondant à la première lettre du mot et x_2 l'entier correspondant à la deuxième lettre du mot selon le tableau de correspondance ci-dessous :

| | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

Étape 2 : La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que $Y = QX$.

Étape 3 : La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ telle que r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 est le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

Étape 4 : À la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ on associe un mot de deux lettres selon le tableau de correspondance de l'étape 1.

$$\text{Exemple : JE} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 66 \\ 57 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{OF.}$$

Le mot JE est codé en le mot OF.

Coder le mot DO.

3. Procédure de décodage

On conserve les mêmes notations que pour le codage.

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que $Y = QX$.

a. Démontrer que $3X = 3Q^{-1}Y$ puis que $\begin{cases} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 & [26] \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 & [26] \end{cases}$

b. En remarquant que $9 \times 3 \equiv 1 \pmod{26}$, montrer que $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 & [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 & [26] \end{cases}$

c. Décoder le mot SG.*