

EXERCICE 3

4 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1-x}}.$$

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e}$ (on rappelle que $e = e^1$).
3. Montrer alors que $\int_0^1 f(x) dx = \ln(2) + 1 - \ln(1 + e)$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + ne^{1-x}}.$$

On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe \mathcal{C}_0 représentative de la fonction f_0 .
2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0 .
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.
4. La suite (u_n) admet-elle une limite?*