

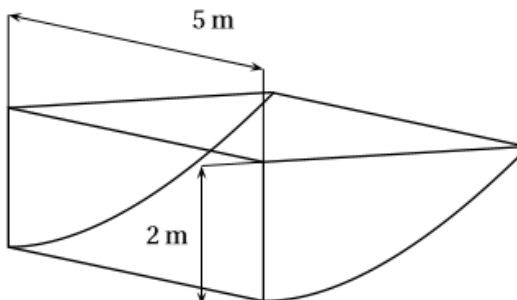
EXERCICE 2

6 points

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.

Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.



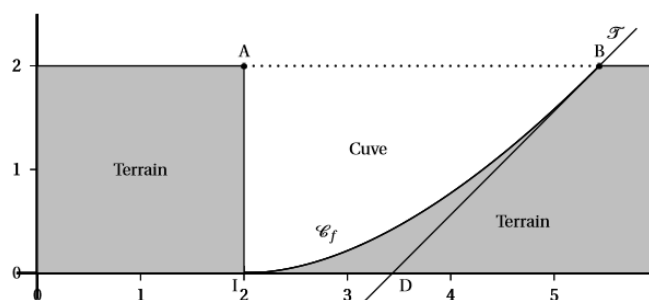
Cette cuve est schématisée ci-contre.

La partie incurvée est modélisée par la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f sur l'intervalle $[2; 2e]$ définie par :

$$f(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe \mathcal{C}_f est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 1 m et constitue une vue de profil de la cuve.

On considère les points $A(2; 2)$, $I(2; 0)$ et $B(2e; 2)$.



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1. Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe \mathcal{C}_f et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe \mathcal{C}_f au point I.
2. On note \mathcal{T} la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point B, et D le point d'intersection de la droite \mathcal{T} avec l'axe des abscisses.
 - a. Déterminer une équation de la droite \mathcal{T} et en déduire les coordonnées de D.
 - b. On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe \mathcal{C}_f , les droites d'équations $y = 2$, $x = 2$ et $x = 2e$.
S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze AIDB.
Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?
3. a. Montrer que, sur l'intervalle $[2; 2e]$, la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$$

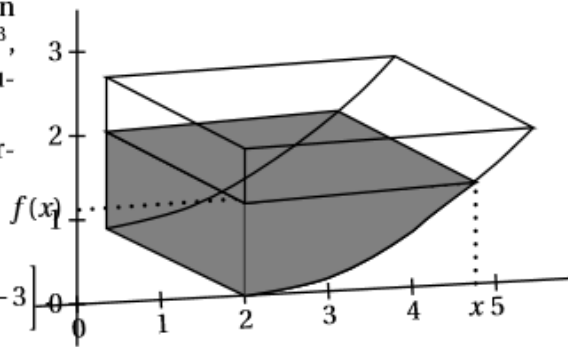
est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

- b. En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2; 2e]$.
- c. Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et $2e$, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3 , se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$. On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2; 2e]$,

$$v(x) = 5 \left[\frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3 \right]$$



1. Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?
2. On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre.
Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

Variables :	a est un réel b est un réel
Traitement :	a prend la valeur 2 b prend la valeur $2e$ Tant que $v(b) - v(a) > 10^{-3}$ faire : c prend la valeur $(a + b)/2$ Si $v(c) < V/2$, alors : a prend la valeur c Sinon b prend la valeur c Fin Si Fin Tant que
Sortie :	Afficher $f(c)$