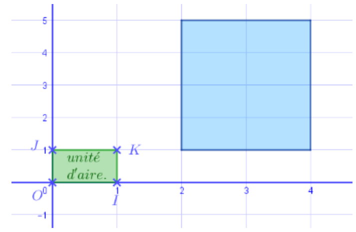
Calcul intégral.

***Jacques Bernoulli** (1654 ; 1705) mathématicien français, reprend en 1696 le mot latin « integer », déjà utilisé au XIVe siècle, pour désigner le calcul intégral.*

I. Intégrale d'une fonction continue et positive.

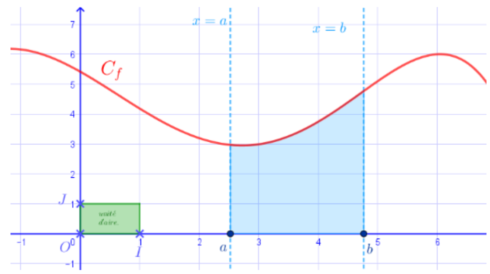


☺ Unité d'aire.

Définition : Dans un repère (O, I, J), soit K le point de coordonnées $(1{,}1)$.
L'aire du rectangle OIKJ s'appelle l'unité d'aire du repère et ce note u.a,

....

....



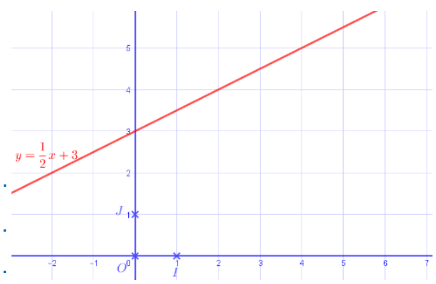
☺ Intégrale d'une fonction continue et positive.

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
L'aire du domaine délimité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en u.a, est appelée intégrale de a à b de la fonction f et se note : $\int_a^b f(x)dx$.

Remarques :

☺ Le nombre $\int_a^b f(x)dx$ ne dépend que de .... on dit que x est la variable muette et on peut écrire .... ou ....

☺ a et b sont appelés les ....



☑Savoir-faire : Savoir déterminer une intégrale par calculs d'aire :

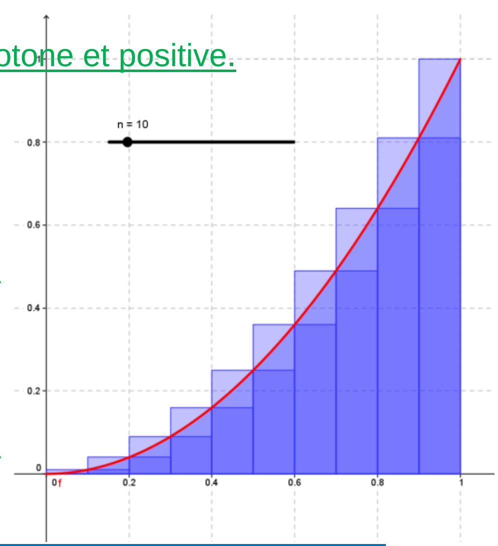
Détermine graphiquement $\int_{-1}^{5}\left(\frac{1}{2}x + 3\right) dx$.

....

....

....

☺ Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive.



L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^2$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 1] et se note : ....
Nous avons vu en activité que ....

....

....

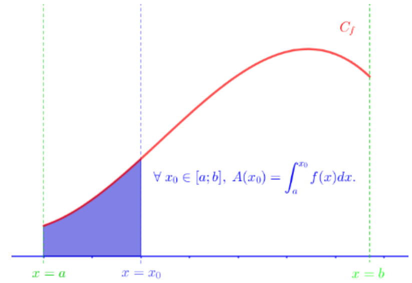
....

....

....

....

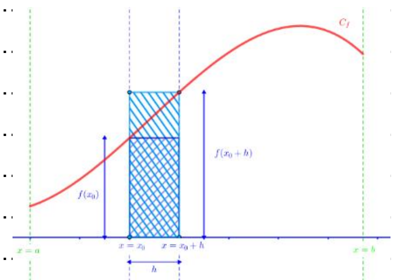
II. Fonction $Aire$.



Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$
La fonction F_a définie sur $[a\,;b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la fonction qui a tout x_0 de $[a\,;b]$ associe l'aire du domaine délimité par C_f ; $y = 0$, $x = a$ et $x = x_0$

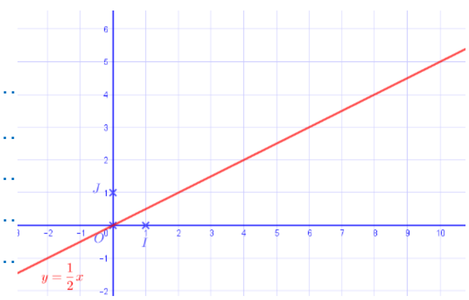
Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$
La fonction F_a définie sur $[a\,;b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration exigible :



☑*Savoir-faire : Savoir étudier une fonction définie par une intégrale :*

Étudie la fonction F définie sur [0 ; 10] par : $F(x) = \int_0^x \frac{t}{2}\,dt$.

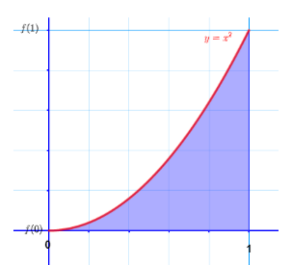


Propriété : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.
Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Démonstration exigible :

☑*Savoir-faire : Savoir calculer l'intégrale d'une fonction positive :*

Calcule $\int_0^1 x^2\,dx$.



III. Calculs d'intégrales.

☺ Notion d'intégrale cas général.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathbb{I}$, a et b deux réels de $\mathbb{I}$.
Soit F une primitive de f sur $\mathbb{I}$.
On appelle intégrale de a à b de f le nombre $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

....

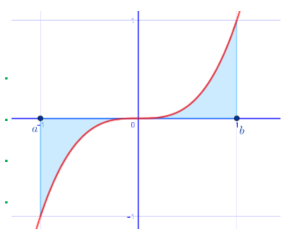
☑ *Savoir-faire : Savoir calculer une intégrale à partir d'une primitive :*

Calcule les intégrales suivantes : $A = \int_1^4 \frac{3}{x^2}\,dx$ $B = \int_2^5 3x^2 + 4x - 5\,dx$ $C = \int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx$

....
....
....
....
....
....
....

Remarque :

....
....
....
....



☺ Propriétés.

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathbb{I}$ et a, b, c des réels de $\mathbb{I}$

☺ $\int_a^a f(x)\,dx =$ ...... ☺ $\int_b^a f(x)\,dx =$ ....

☺ $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx =$................. cette propriété s'appelle la relation de Mr Chasles.

Propriété de linéarité : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $\mathbb{I}$; a et b deux réels de $\mathbb{I}$

☺ Pour tout réel k, $\int_a^b k\,f(x)\,dx =$ ....

☺ $\int_a^b \quad f(x) + g(x) \quad dx =$...............................

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer une intégrale en appliquant la linéarité :*

Soit $I = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx$ et $J = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx$. Calcule $I + J$ et $I - J$, en déduire I et J.

....
....
....
....
....

☺ Inégalités.

Propriété de linéarité : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; $a \leq b$ deux réels de I

☺ Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

☺ Si, pour tout x de $[a\,;b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

☑*Savoir-faire : Savoir encadrer une intégrale :*

Démontrer que pour tout x de [0 ; 1], on a : $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$. En déduire que : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e - 1$.

....

....

....

....

....

☺ Intégration par parties.

Théorème : Soit u et v deux fonctions dérivables sur $[a\,;b]$. Alors, on a :

$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$

Démonstration exigible :

....

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir calculer une intégrale en intégrant par parties :*

Calcule les intégrales suivantes : $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx$ $\qquad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\,dx$ $\qquad C = \int_1^{e^2} \ln x\,dx$

....

....

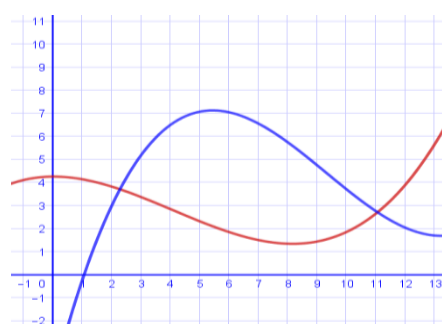
....

....

....

IV. Applications du calcul intégral.

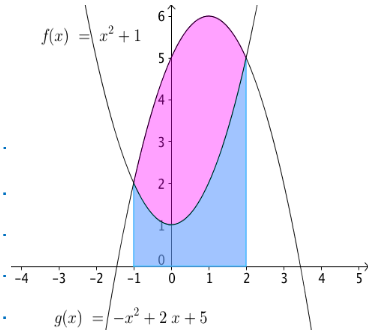
☺ Aire délimitée par deux courbes.



Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$ telles que $f \leq g$ sur $[a\,;b]$.
Soient C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.

Alors l'aire du domaine délimité par C_f, C_g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en u.a, est égale à ....

☑*Savoir-faire : Savoir calculer l'aire délimitée par les courbes de deux fonctions :*



On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x + 5$.
On admet que pour tout x de $[-1\,;2]$, on a $f(x) \leq g(x)$.
Déterminer l'aire délimitée par C_f et C_g sur l'intervalle $[-1\,;2]$.

....

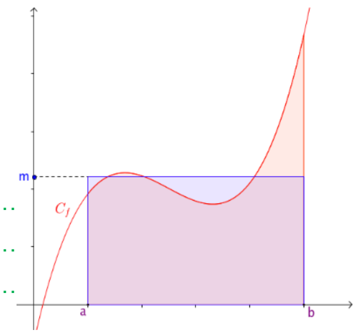
....

....

....

....

☺ Valeur moyenne d'une fonction.



Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$ avec $a \neq b$..
On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a\,;b]$ le nombre réel : $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Remarque :

....

....

....

☑*Savoir-faire : Savoir calculer une valeur moyenne d'une fonction :*

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.
Au x-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.
Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

....

....

....

....

....

☺ Intégrales et suites.

☑*Savoir-faire : Savoir étudier une suite d'intégrales :*

On considère la suite d'intégrales (I_n) définie pour tout entier n, par : $I_n = \int_1^e x\,(\ln x)^n\,dx$
1) Calculer I_0.
2) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$
3) A l'aide d'un programme écrit en Python, conjecturer la limite de la suite (I_n).

....

....

....

....

....

....

....