

## EXERCICE 4

5 points

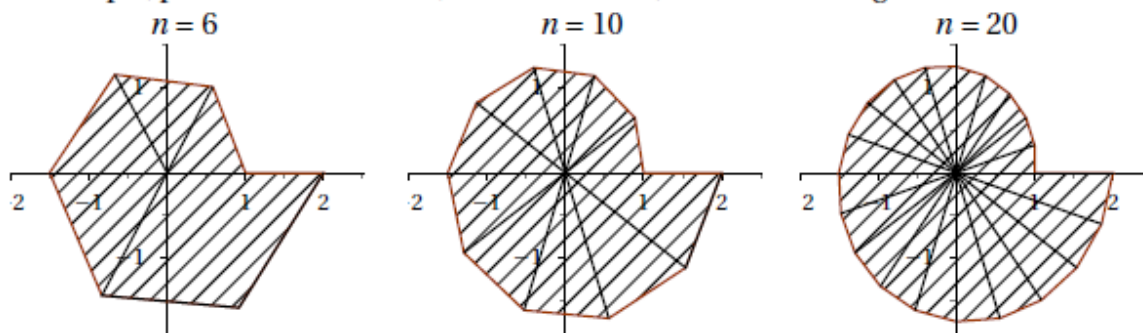
On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautilus à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier  $k$  allant de 0 à  $n$ , on définit les nombres complexes  $z_k = \left(1 + \frac{k}{n}\right) e^{i\frac{2k\pi}{n}}$  et on note  $M_k$  le point d'affixe  $z_k$ .

Dans ce modèle, le pourtour du nautilus est la ligne brisée reliant tous les points  $M_k$  avec  $0 \leq k \leq n$ .

Par exemple, pour les entiers  $n = 6$ ,  $n = 10$  et  $n = 20$ , on obtient les figures ci-dessous.



## Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que  $n = 6$ . Ainsi, pour  $0 \leq k \leq 6$ , on a  $z_k = \left(1 + \frac{k}{6}\right) e^{i\frac{2k\pi}{6}}$ .

- Déterminer la forme algébrique de  $z_1$ .
- Vérifier que  $z_0$  et  $z_6$  sont des entiers que l'on déterminera.
- Calculer la longueur de la hauteur issue de  $M_1$  dans le triangle  $OM_0M_1$  puis établir que l'aire de ce triangle est égale à  $\frac{7\sqrt{3}}{24}$ .

Partie B : Ligne brisée formée à partir de  $n + 1$  points

Dans cette partie,  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2.

- Pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ , déterminer la longueur  $OM_k$ .
- Pour  $k$  entier tel que  $0 \leq k \leq n-1$ , déterminer une mesure des angles  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM_k})$  et  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM_{k+1}})$ .  
En déduire une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{OM_k}; \overrightarrow{OM_{k+1}})$ .
- Pour  $k$  entier tel que  $0 \leq k \leq n-1$ , démontrer que la longueur de la hauteur issue de  $M_{k+1}$  dans le triangle  $OM_kM_{k+1}$  est égale à  $\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) \times \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ .

4. On admet que l'aire du triangle  $OM_kM_{k+1}$  est égale à

$a_k = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$  et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à  $A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}$ .

L'algorithme suivant permet de calculer l'aire  $A_n$  lorsqu'on entre l'entier  $n$  :

VARIABLES	$A$ est un nombre réel $k$ est un entier $n$ est un entier
TRAITEMENT	Lire la valeur de $n$ $A$ prend la valeur 0 Pour $k$ allant de 0 à $n-1$ $A$ prend la valeur $A + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$ Fin Pour
SORTIE	Afficher $A$

On entre dans l'algorithme  $n = 10$

Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme.

$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A$	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726		

5. On admet que  $A_2 = 0$  et que la suite  $(A_n)$  converge et que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{7\pi}{3} \approx 7,3$ .

Recopier et compléter les lignes L6 et L13 de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier  $n$  tel que  $A_n \geq 7,2$ . On ne demande pas de déterminer  $n$ .

L1	VARIABLES :	$A$ est un nombre réel
L2		$k$ est un entier
L3		$n$ est un entier
L4	TRAITEMENT :	$n$ prend la valeur 2
L5		$A$ prend la valeur 0
L6		Tant que.....
L7		$n$ prend la valeur $n + 1$
L8		$A$ prend la valeur 0
L9		Pour $k$ allant de 0 à $n - 1$
L10		$A$ prend la valeur $A + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \times \left(1 + \frac{k}{n}\right) \left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$
		Fin Pour
L12		Fin Tant que
L13	SORTIE :	Afficher ...