

☑Savoir-faire : Savoir utiliser la durée de vie sans vieillissement :

La durée de vie, exprimée en heures, d'un petit composant électronique d'une carte d'anniversaire musicale est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0035$. Sachant qu'un composant testé a fonctionné plus de 200 heures, calculer la probabilité qu'il tombe en panne avant 300 heures.

3) Espérance mathématique

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . Alors : $E(X) = \dots\dots\dots$

Démonstration (ROC exigible BAC) :

f désigne la densité de la loi exponentielle de paramètre λ , $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ et g définie par $g(t) = t f(t)$.
 g est continue sur tout intervalle $[0 ; A[$, avec $A > 0$, donc elle admet des primitives sur cet intervalle.

☑Exercice BAC : Polynésie 2016 :

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0,2$.

Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.

L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1. Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ 0,451.
2. Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à 0,95 ? Arrondir ce temps à la minute près.
3. L'astronome a prévu une sortie de deux heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

☑Exercice BAC : Métropole 2016 :

La durée de vie, en années, d'un composant électronique fabriqué dans cette usine est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (où λ est un nombre réel strictement positif).

On note f la fonction densité associée à la variable aléatoire T . On rappelle que :

- pour tout nombre réel $x \geq 0$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.
- pour tout nombre réel $a \geq 0$, $P(T \leq a) = \int_0^a f(x) dx$.

1. La courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous.

- a. Interpréter graphiquement $P(T \leq a)$ où $a > 0$.
- b. Montrer que pour tout nombre réel $t \geq 0$: $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- c. En déduire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(T \leq t) = 1$.

2. On suppose que $P(T \leq 7) = 0,5$. Déterminer λ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question on prend $\lambda = 0,099$ et on arrondit les résultats des probabilités au centième.

- a. On choisit au hasard un composant fabriqué dans cette usine.
Déterminer la probabilité que ce composant fonctionne au moins 5 ans.
- b. On choisit au hasard un composant parmi ceux qui fonctionnent encore au bout de 2 ans.
Déterminer la probabilité que ce composant ait une durée de vie supérieure à 7 ans.
- c. Donner l'espérance mathématique $E(T)$ de la variable aléatoire T à l'unité près.
Interpréter ce résultat.*

