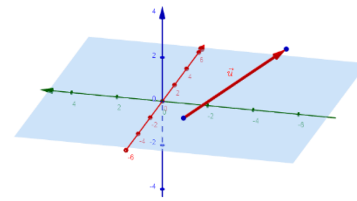
Vecteurs, droites et plans dans l’espace.

Roger Penrose *(1931;……) mathématicien, physicien et astrophysicien britannique, il a travaillé avec Stephen Hawking ainsi que sur des « pavages » et des objets impossibles.*

I. Vecteurs de l’espace.

☺ Définition.

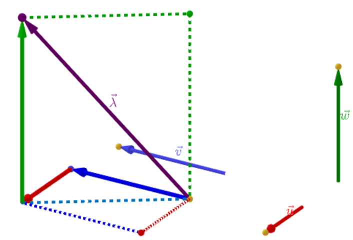


Définition : Un vecteur de l'espace est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Remarques :
Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles qu'en géométrie dans le plan : représentants, vecteurs égaux, relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité, …

☺ Translation.

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur de l’espace. On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ la transformation qui au point M associe le point M', tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



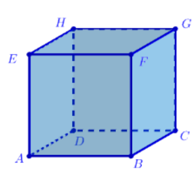
☺ Combinaisons linéaires de vecteurs de l’espace.

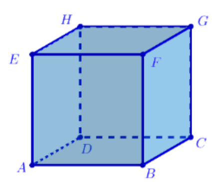
Définition : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l’espace.
Tout vecteur $\vec{\lambda}$ de la forme $\vec{\lambda} = \alpha\,\vec{u} + \beta\,\vec{v} + \gamma\,\vec{w}$, avec α, β et γ réels, est appelé une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

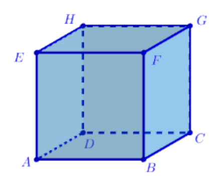
☑*Savoir-faire : Savoir représenter des combinaisons linéaires de vecteurs donnés :*

On considère un cube $ABCDEFGH$, représenter les vecteurs :

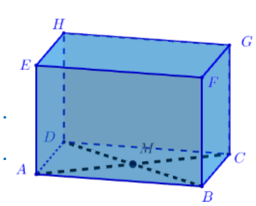
☺ $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{FH}$ ☺ $\vec{b} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FC}$ ☺ $\vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BF} - \overrightarrow{AC}$







☑*Savoir-faire : Savoir exprimer un vecteur comme combinaisons linéaires de vecteurs :*



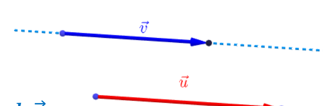
Dans le parallélépipède ci-contre, M est le centre du rectangle $ABCD$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MF}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.

……

……

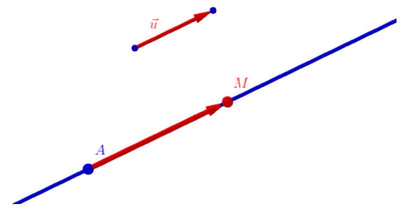
II. Droites de l’espace.

☺ Vecteurs colinéaires.



Définition et propriété :
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsqu’ils ont même direction.
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

☺ Droites dans l’espace.

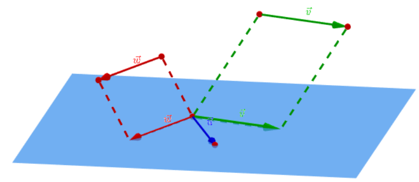


Définition : Soit (d) une droite. On appelle vecteur directeur de (d) tout vecteur non nul qui possède la même direction que la droite (d).

Propriété : Soit A un point de l’espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l’espace. La droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l’ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Propriété : Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

III. Plans de l’espace.

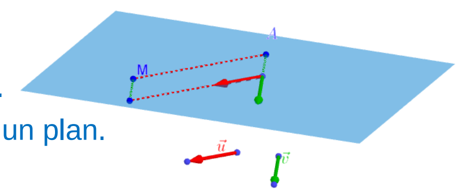


☺ Vecteurs coplanaires.

Définition : Trois vecteurs sont dits coplanaires s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.

Propriété : Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe un couple de nombres réels $(x\,;y)$ tel que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ (l’un est une combinaison linéaire des deux autres.)

☺ Plans de l’espace.

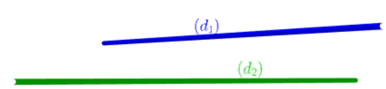


Définition : Soit un point A et deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
L'ensemble (P) des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est un plan.
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de (P).
Le couple $(\vec{u};\vec{v})$ est appelé une base de (P) et $(A;\vec{u};\vec{v})$ est appelé un repère de (P).

Remarques :
☺ Un plan est entièrement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.
☺ Un plan est entièrement déterminé par trois points non alignés.

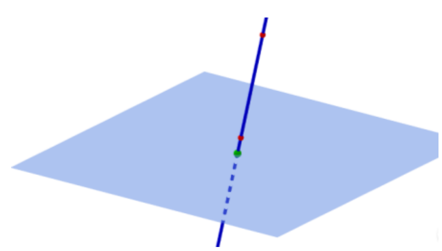
IV. Position relative de droites et de plans dans l’espace.

☺ Position relative de deux droites.



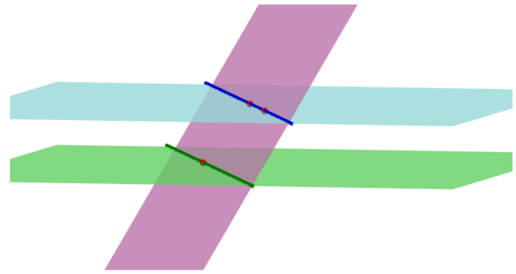
Propriété : Deux droites de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires.
Elles sont coplanaires si et seulement si elles sont parallèles ou sécantes.

☺ Position relative d’une droite et d’un plan.



Propriété : Une droite est parallèle à un plan lorsqu’elle admet un vecteur directeur colinéaire à un vecteur directeur du plan.
Si une droite n’est pas parallèle à un plan alors elle admet un unique point d’intersection avec ce plan.

☺ Position relative de deux plans.

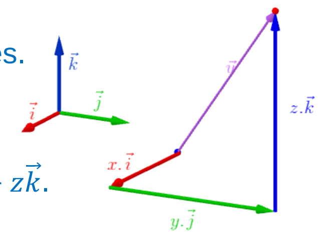


Définition : Deux plans sont parallèles lorsqu'ils admettent un même couple de vecteurs directeurs non colinéaires.
Deux plans non parallèles sont sécants leur intersection est une droite.

Propriété : Lorsque deux plans sont parallèles tout plan coupant l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

V. Bases et repères de l'espace.

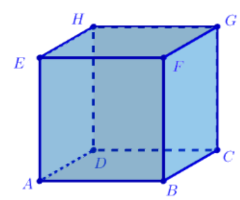
☺ Bases de l'espace.



Définition : On appelle base de l'espace un triplet de vecteurs $(\vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k})$ non coplanaires.

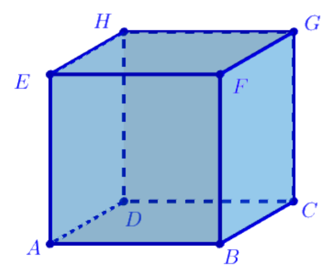
Propriété : Soit $(\vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k})$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique triplet de nombres $(x\,;y\,;z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$.
$(x\,;y\,;z)$ sont alors les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k})$.

☑*Savoir-faire : Savoir reconnaitre une base de l'espace :*



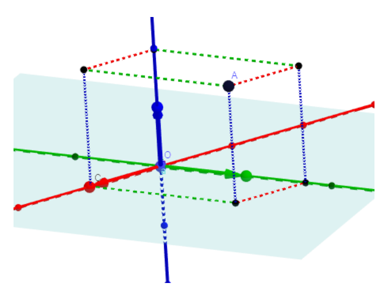
On considère un cube $ABCDEFGH$, utiliser ce cube pour déterminer une base de l'espace puis exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG}$ dans cette base :
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

☑*Savoir-faire : Savoir démontrer l'alignement par décomposition de vecteurs dans une base :*



$ABCDEFGH$ est un cube, I le milieu de $[AH]$ et J le point de $[FI]$ tel que : $\overrightarrow{FJ} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{FI}$
Démontrer que les points E, J et C sont alignés.
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

☺ Repères de l'espace.



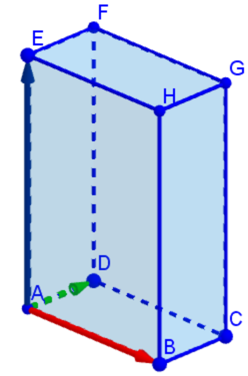
Définition : Soit $(\vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k})$ une base de l'espace et O un point de l'espace.
On dit que le quadruplet $(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$ est un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de nombres $(x\,;y\,;z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. $(x\,;y\,;z)$ sont les coordonnées de M dans le repère $(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k})$.

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer des coordonnées dans l'espace :*

Soit un parallélépipède $ABCDEFGH$. I est le milieu de $[CG]$.
M et N sont définis par : $\overrightarrow{NF} = 2\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI}$

☺ Dans le repère $(A\,; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, donner les coordonnées de tous les points de la figure.

☺ Placer le point $K(1\,;3\,;\,-1)$.



....
....
....
....
....
....
....
....
....

Propriété: Soit $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.

☺ Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et k un nombre réel. Alors :

Dans la base $(\vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k})$, on a : $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ et $k.\vec{u}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ....

☺ Soient $A\ (x_A\,;\ y_A\ ;\, z_A)$ et $B\ (x_B\,;\ y_B\ ;\, z_B)$ deux points de l'espace. Alors :

Dans la base $(\vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k})$, on a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

Dans le repère $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, les coordonnées de M milieu de $[AB]$ sont ....

....
....
....
....

☑*Savoir-faire : Savoir démontrer que 4 points sont coplanaires :*

Dans un repère $(O\,; \vec{\imath}\,; \vec{\jmath}\,; \vec{k})$, on considère les points $A(2;-1;4)$, $B(6;-7;0)$, $C(1;0;1)$ et $D(13;-16;5)$.
Démontre que les points A, B, C et D sont coplanaires.

....
....
....
....
....
....
....
....
....