

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

*Les valeurs approchées des résultats seront données à 10^{-4} près.**Les parties A et B sont indépendantes*

Partie A

Un fabricant d'ampoules possède deux machines, notées A et B. La machine A fournit 65 % de la production, et la machine B fournit le reste. Certaines ampoules présentent un défaut de fabrication :

- à la sortie de la machine A, 8 % des ampoules présentent un défaut ;
- à la sortie de la machine B, 5 % des ampoules présentent un défaut.

On définit les événements suivants :

- A : « l'ampoule provient de la machine A » ;
- B : « l'ampoule provient de la machine B » ;
- D : « l'ampoule présente un défaut ».

1. On prélève un ampoule au hasard parmi la production totale d'une journée.

- a. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
- b. Montrer que la probabilité de tirer une ampoule sans défaut est égale à 0,9305.
- c. L'ampoule tirée est sans défaut.

Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A.

2. On prélève 10 ampoules au hasard parmi la production d'une journée à la sortie de la machine A. La taille du stock permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à tirages avec remise.

Calculer la probabilité d'obtenir au moins 9 ampoules sans défaut.

Partie B

1. On rappelle que si T suit une loi exponentielle de paramètre λ (λ étant un réel strictement positif) alors pour tout réel positif a , $P(T \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx$.

- a. Montrer que $P(T \geq a) = e^{-\lambda a}$.
- b. Montrer que si T suit une loi exponentielle alors pour tous les réels positifs t et a on a

$$P_{T \geq t}(T \geq t + a) = P(T \geq a).$$

2. Dans cette partie, la durée de vie en heures d'une ampoule sans défaut est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 000.

- a. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ de cette loi.
- b. Calculer la probabilité $P(T \geq 5000)$.
- c. Sachant qu'une ampoule sans défaut a déjà fonctionné pendant 7000 heures, calculer la probabilité que sa durée de vie totale dépasse 12 000 heures.

Partie C

L'entreprise a cherché à améliorer la qualité de sa production et affirme qu'il n'y a pas plus de 6 % d'ampoules défectueuses dans sa production. Une association de consommateurs réalise un test sur un échantillon et obtient 71 ampoules défectueuses sur 1 000.

1. Dans le cas où il y aurait exactement 6 % d'ampoules défectueuses, déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence d'ampoules défectueuses sur un échantillon aléatoire de taille 1 000.
2. A-t-on des raisons de remettre en cause l'affirmation de l'entreprise?*

Variables :	M, N, P, Q : entiers relatifs non nuls, tels que $\text{pgcd}(M, N) = \text{pgcd}(P, Q) = 1$ X : entier naturel
Entrées :	Saisir les valeurs de M, N, P, Q
Traitement et sorties :	Si Q divise N alors X prend la valeur 0 Tant que $\left(\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}\right)$ n'est pas entier et $\left(-\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}\right)$ n'est pas entier faire X prend la valeur $X + 1$ Fin tant que Si $\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}$ est entier alors Afficher $X, \frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}$ Sinon Afficher $-X, -\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}$ Fin Si Sinon Afficher « Pas de solution » Fin Si