Bac S Antilles-Guyane 20 Juin 2016

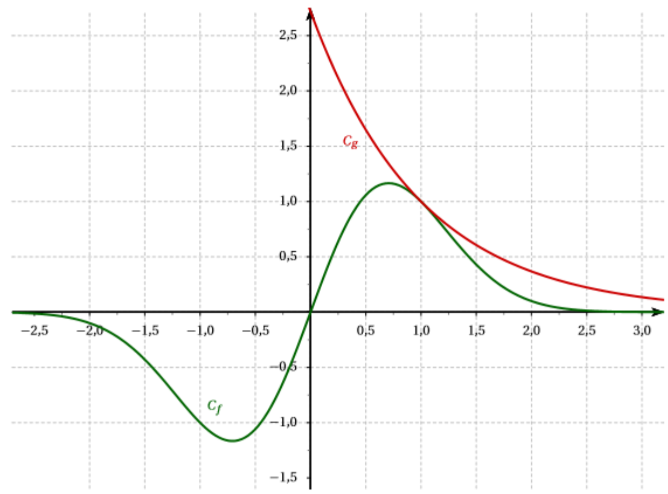
EXERCICE 3 — 7 points

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

1. Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   Indication : on pourra utiliser que pour tout réel x différent de 0, $f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{x^2}}$.
   On admettra que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à 0.
2. **a.** On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa dérivée.
   Démontrer que pour tout réel x,
   $$f'(x) = \left(1-2x^2\right)\mathrm{e}^{1-x^2}.$$
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f.



Partie B

On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = \mathrm{e}^{1-x}$.
Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère les courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ respectivement des fonctions f et g.

Le but de cette partie est d'étudier la position relative de ces deux courbes.

1. Après observation du graphique, quelle conjecture peut-on émettre ?
2. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]-\infty\,;\,0]$, $f(x) < g(x)$.
3. Dans cette question, on se place dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On pose, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) = \ln x - x^2 + x$.
   a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,
   $$f(x) \leqslant g(x) \text{ équivaut à } \Phi(x) \leqslant 0.$$
   On admet pour la suite que $f(x) = g(x)$ équivaut à $\Phi(x) = 0$.
   b. On admet que la fonction Φ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. Dresser le tableau de variation de la fonction Φ. (Les limites en 0 et $+\infty$ ne sont pas attendues.)
   c. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $\Phi(x) \leqslant 0$.
4. **a.** La conjecture émise à la question 1. de la partie B est-elle valide ?
   b. Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un unique point commun, noté A.
   c. Montrer qu'en ce point A, ces deux courbes ont la même tangente.

Partie C

1. Trouver une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{1-x} - x\mathrm{e}^{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$.
3. Interpréter graphiquement ce résultat.*