

EXERCICE 4

5 points

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.

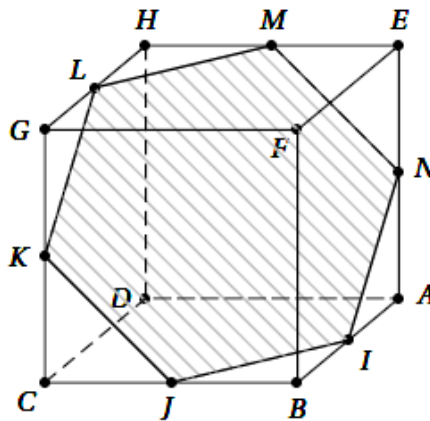
L'espace est muni du repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a :

$D(0; 0; 0)$, $C(1; 0; 0)$, $A(0; 1; 0)$,

$H(0; 0; 1)$ et $E(0; 1; 1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit \mathcal{P} le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I .

On admet que la section du cube par le plan \mathcal{P} représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets $I, J, K, L, M,$ et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB], [BC], [CG], [GH], [HE]$ et $[AE]$.

1. a. Montrer que le vecteur \overrightarrow{DF} est normal au plan (BGE) .
b. En déduire une équation cartésienne du plan \mathcal{P} .
2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.
3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB) .
b. En déduire que la droite (HB) et le plan \mathcal{P} sont sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.
4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.*