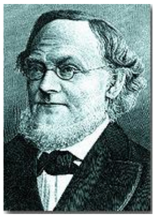
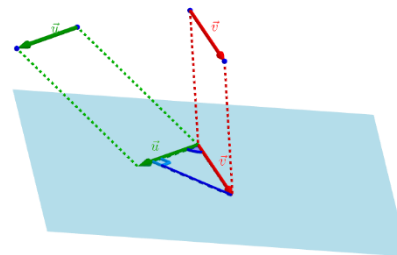


Orthogonalité et distances dans l'espace.

***Hermann Grassmann** (1809 ; 1877) mathématicien allemand. Dans le plan et dans l'espace, il étudie la géométrie algébriquement et introduit l'extension du calcul vectoriel du plan à l'espace.*

I. Produit scalaire dans l'espace.

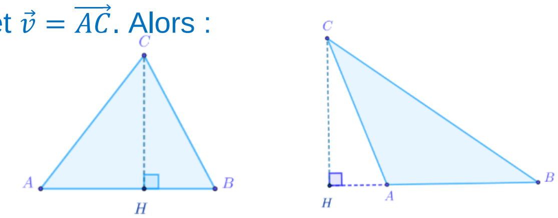
☺ Définition.



Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et A, B et C trois points d'un plan (P) tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle produit scalaire de l'espace de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le réel $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans le plan P. On le note $\vec{u}.\vec{v}$.

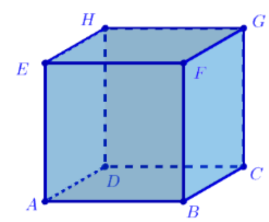
Remarque : $\vec{u}.\vec{v}$ ne dépend pas des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ choisis.

Propriété : Soient A, B et C trois points distincts, on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Alors :
☺ $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) = AB \times AC \times \cos(\widehat{ABC})$
☺ Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), alors :
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$.
Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$.



☑Savoir-faire : Savoir calculer un produit scalaire dans l'espace :

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête a, calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$.
....
....
....



☺ Propriétés algébriques du produit scalaire.

Propriété : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace, k un nombre réel.
☺ $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ ☺ $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (symétrie)
☺ $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ et $(k\,\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\,\vec{v}) = k(\vec{u}.\vec{v})$ (bilinéarité)
☺ $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$ ☺ $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
☺ $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Propriété formules de polarisation : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace,
☺ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ ☺ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
☺ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

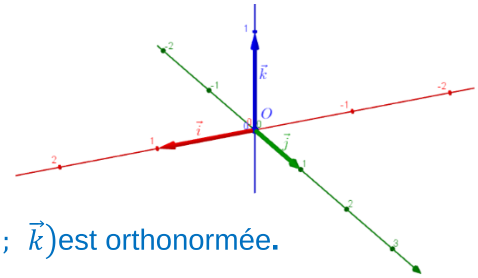
☺ Orthogonalité de deux vecteurs.

Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace.

II. Produit scalaire dans un repère orthormé.

☺ Expression analytique du produit scalaire.



Définition : Une base $(\vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k})$ de l'espace est dite **orthonormée** lorsque :
☺ Les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux.
☺ Les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont unitaires, soit : $\|\vec{\imath}\| = 1$, $\|\vec{\jmath}\| = 1$ et $\|\vec{k}\| = 1$.
On dit qu'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k})$de l'espace est **orthonormé,** si sa base $(\vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k})$est orthonormée**.**

Propriété : Soit $(O\,;\vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k})$un repère orthonormé et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

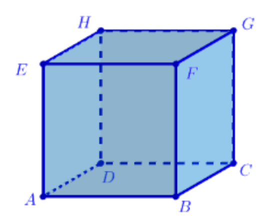
Alors $\vec{u}.\vec{v} =$..

☑*Savoir-faire : Savoir calculer un produit scalaire dans un repère orthonormé :*

Soit $(O\,;\vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k})$ un repère orthonormé, $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calcule $\vec{u}.\vec{v}$.
....

☺ Vecteurs orthogonaux.

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer si des vecteurs sont orthogonaux :*



On considère le repère $(C\,;\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CG})$. Les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont-ils orthogonaux ?
....
....
....

☺ Distance entre deux points dans l'espace.

Propriété : Soit $(O\,;\vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k})$ un repère orthonormé et $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur.

Alors $\|\vec{u}\| =$..

Propriété : Soit $(O\,;\vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k})$ un repère orthonormé et $A(x_A\,;\ y_A\,;\ z_A)$ et $B(x_B\,; y_B\,;\ z_B)$ deux points.
Alors $AB =$..

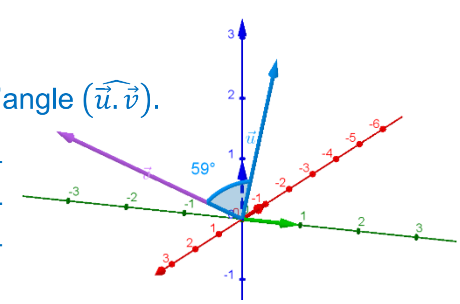
☑*Savoir-faire : Savoir calculer distance entre deux points :*

Soit $(O\,;\vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k})$ un repère orthonormé, $A(-5\,;\ 3\,;\ 2)$ et $B(1\,;\ 3\,;\ 2)$. Calcule AB.
....

☺ Calcul d'angles dans l'espace.

☑*Savoir-faire : Savoir calculer une mesure d'angle dans l'espace :*

Soit $(O\,;\vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k})$ un repère orthonormé, $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calcule la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u}.\vec{v}})$.



....
....
....

II. Orthogonalité dans l'espace.

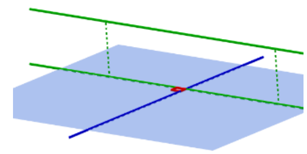
☺ Orthogonalité de deux droites.

Définition : Deux droites de l'espace sont orthogonales si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Remarque : Deux droites orthogonales ne sont pas forcément coplanaires, si elles le sont, alors elles sont perpendiculaires.

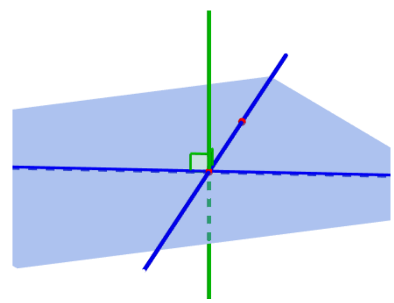
☑*Savoir-faire : Savoir déterminer si deux droites sont orthogonales :*

Soient $A(0\,;\ 2\,;\ 0\,)$, $B(-1; 5;\ -4)$, $C(5;\ 0; 4\,)$ et $D(9; -16; -9)$.
Les droites (AB) et (CD) sont-elles orthogonales ?



Propriété : Deux droites (d) et (d') sont orthogonales si et seulement si il existe une droite (Δ) parallèle à (d) et perpendiculaire à (d').

☺ Orthogonalité d'un plan et d'une droite.

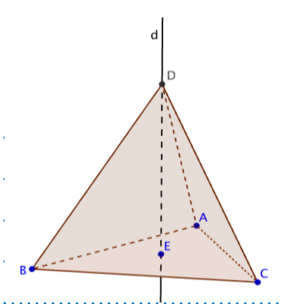


Définition :
Une droite (d) de vecteur directeur $\vec{w}$ est orthogonale à un plan (P) de base $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ si $\vec{w}$ est orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

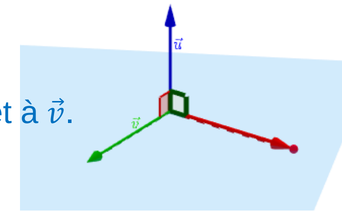
Propriétés :
☺ Une droite (d) est orthogonale à un plan (P) si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de (P).
☺ Si une droite (d) est orthogonale à un plan (P) alors elle est orthogonale à toutes les droites de (P).

☑*Savoir-faire : Savoir démontrer que deux droites sont orthogonales :*

ABC est un triangle équilatéral. E est le point d'intersection de ses médianes.
La droite (d) passant par E est orthogonale au plan (ABC).
La pyramide $ABCD$ est telle que D soit un point de la droite (d).
Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.



III. Vecteur normal à un plan.



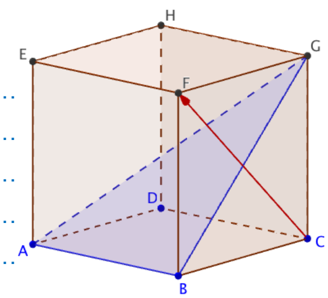
Définition : Soit un plan (P) de base $(\vec{u}\ ;\ \vec{v})$.
Un vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (P) s'il est non nul et orthogonal à la fois à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

Propriété : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan *P* lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans *P*.

Propriété : Soit un point A et un vecteur $\vec{n}$ non nul de l'espace.
Il existe un unique plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer si un vecteur est normal à un plan :*

$ABCDEFGH$ est un cube. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG).

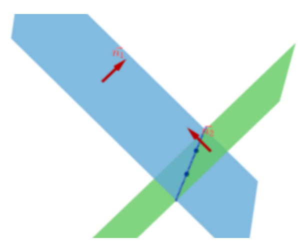


....
....
....
....
....

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer un vecteur normal à un plan :*

Dans un repère orthonormé, soit $A\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ trois points.
Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

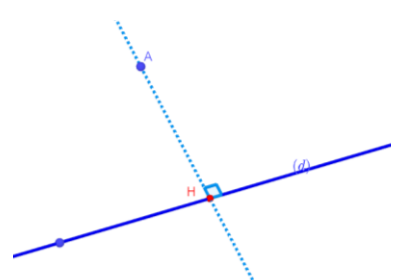
....
....
....
....
....
....



Définition : Soit (P_1) un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$ et (P_2) un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n_2}$. Les plans (P_1) et (P_2) sont dit perpendiculaires si les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux.

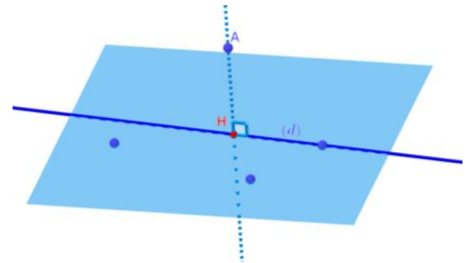
IV. Projection orthogonale dans l'espace.

☺ Projection orthogonale d'un point sur une droite.



Définition : Soit un point A et une droite (d) de l'espace.
La projection orthogonale de A sur (d) est le point H appartenant à d tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite (d).

☺ Projection orthogonale d'un point sur un plan.



Définition : Soit un point A et un plan (P) de l'espace.
Il existe une unique droite passant par A et orthogonale à (P).
Le point d'intersection de cette droite et du plan (P) s'appelle le projeté orthogonal de A sur (P).

Propriété : Soit un point A et un plan (P) de l'espace.
Le projeté orthogonal H de A sur (P) est le point du plan (P) le plus proche de A.
La distance AH est appelée distance du point A au plan (P).

Démonstration exigible :

☑*Savoir-faire : Savoir déterminer la distance d'un point à un plan :*

$ABCDEFGH$ est un cube. Calculer la distance du point G au plan BDE.