# Bac S Antilles-Guyane 20 Juin 2016

## EXERCICE 4 — 5 points

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

*Les parties A et B sont indépendantes*

**Partie A**

On considère l'équation suivante d'inconnues $x$ et $y$ entiers relatifs :

$$7x - 3y = 1. \qquad \text{(E)}$$

1. Un algorithme incomplet est donné ci-dessous. Le recopier et le compléter, en écrivant ses lignes manquantes (1) et (2) de manière à ce qu'il donne les solutions entières $(x\,;\,y)$ de l'équation (E) vérifiant $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$.

```
Variables :   X est un nombre entier
              Y est un nombre entier
Début :       Pour X variant de –5 à 10
                  (1) ...............
                      (2) ...............
                      Alors Afficher X et Y
                      Fin Si
                  Fin Pour
              Fin Pour
Fin
```

2. **a.** Donner une solution particulière de l'équation (E).

   **b.** Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

   **c.** Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) tels que $-5 \leqslant x \leqslant 10$ et $-5 \leqslant y \leqslant 10$.

**Partie B**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$.

On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$7x - 3y - 1 = 0$$

On définie la suite $(A_n)$ de points du plan de coordonnées $(x_n\ :\ y_n)$ vérifiant pour tout $n$ entier naturel :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & 1 \\ y_0 & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & -\frac{13}{2}x_n + 3y_n \\ y_{n+1} & = & -\frac{35}{2}x_n + 8y_n \end{array}\right.$$

1. On note $M$ la matrice $\begin{pmatrix} \frac{-13}{2} & 3 \\ \frac{-35}{2} & 8 \end{pmatrix}$. Pour tout entier naturel $n$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

   **a.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $X_{n+1} = MX_n$.

   **b.** Sans justifier, exprimer pour tout entier naturel $n$, $X_n$ en fonction de $M^n$ et $X_0$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}$ et on admet que la matrice inverse de $P$, notée $P^{-1}$, est définie par $P^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

   a. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale $D$ que l'on précisera.

   b. Pour tout entier naturel $n$, donner $D^n$ sans justification.

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

3. On admet que, pour tout entier naturel $n$, $M^n = \begin{pmatrix} -14 + \frac{15}{2^n} & 6 - \frac{6}{2^n} \\ -35 + \frac{35}{2^n} & 15 - \frac{14}{2^n} \end{pmatrix}$.

   En déduire que, pour tout entier naturel $n$, une expression de $x_n$ et $y_n$ en fonction de $n$.

4. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, le point $A_n$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.*

| | |
|---|---|
| **Variables :** | $M, N, P, Q$ : entiers relatifs non nuls, tels que pgcd$(M, N)$ = pgcd$(P, Q) = 1$ |
| | $X$ : entier naturel |
| **Entrées :** | Saisir les valeurs de $M, N, P, Q$ |
| **Traitement et sorties :** | |
| | Si $Q$ divise $N$ alors |
| | $X$ prend la valeur 0 |
| | Tant que $\left(\frac{M}{N}X - \frac{P}{Q}\text{n'est pas entier}\right)$ |