

EXERCICE 3

7 points

Commun à tous les candidats

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour.

La société met en place le dispositif industriel suivant.

Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.

L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : premier modèle – avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante :

$$u_0 = 1000 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 1,2u_n - 100.$$

1. a. Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé.
On précisera en particulier ce que représente u_n .
- b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
- c. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	u prend la valeur 1 000 n prend la valeur 0 Tant que faire u prend la valeur n prend la valeur $n + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1000$.
- b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - 500$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
 - b. Exprimer v_n , puis u_n , en fonction de n .
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie B : second modèle – avec une fonction

On constate qu'en pratique, la masse de bactéries dans la cuve ne dépassera jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty]$ par :

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49e^{-0,2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jours et où $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t .

1. a. Calculer $f(0)$.
b. Démontrer que, pour tout réel $t \geq 0$, $f(t) < 50$.
c. Étudier le sens de variation de la fonction f .
d. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.
3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
Résoudre l'inéquation d'inconnue t : $f(t) > 30$.
En déduire la réponse au problème.

Partie C : un contrôle de qualité

Les bactéries peuvent être de deux types : le type A, qui produit effectivement une protéine utile à l'industrie, et le type B, qui ne la produit pas et qui est donc inutile d'un point de vue commercial.

L'entreprise affirme que 80 % des bactéries produites sont de type A.

Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire analyse un échantillon aléatoire de 200 bactéries en fin de production.

L'analyse montre que 146 d'entre elles sont de type A.

L'affirmation de l'entreprise doit-elle être remise en cause?*