

**EXERCICE 2****4 points**

On considère les nombres complexes  $z_n$  définis pour tout entier  $n \geq 0$  par la donnée de  $z_0$ , où  $z_0$  est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

1.
  - a. Dans cette question, on suppose que  $z_0 = 2$ . Déterminer les nombres  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  et  $z_6$ .
  - b. Dans cette question, on suppose que  $z_0 = i$ . Déterminer la forme algébrique des nombres complexes  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  et  $z_6$ .
  - c. Dans cette question on revient au cas général où  $z_0$  est un complexe donné. Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par  $z_{3n}$  selon les valeurs de l'entier naturel  $n$ ?  
Prouver cette conjecture.
2. Déterminer  $z_{2016}$  dans le cas où  $z_0 = 1 + i$ .
3. Existe-t-il des valeurs de  $z_0$  tel que  $z_0 = z_1$ ? Que peut-on dire de la suite  $(z_n)$  dans ce cas?\*