

EXERCICE 3

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.

Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.

Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1 - a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

Variables :	a, b, d, s sont des entiers i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :	a prend la valeur 0 b prend la valeur 0 Saisir n
Traitement :	Pour i allant de 1 à n faire d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6 Si $d \leq 2$ alors a prend la valeur $1 - a$ sinon Si $d \leq 4$ alors b prend la valeur $1 - b$ FinSi FinSi s prend la valeur $a + b$ FinPour
Sortie :	Afficher s

- a. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation	X	X			X
1 ^{er} passage boucle Pour					
2 ^e passage boucle Pour					
3 ^e passage boucle Pour					

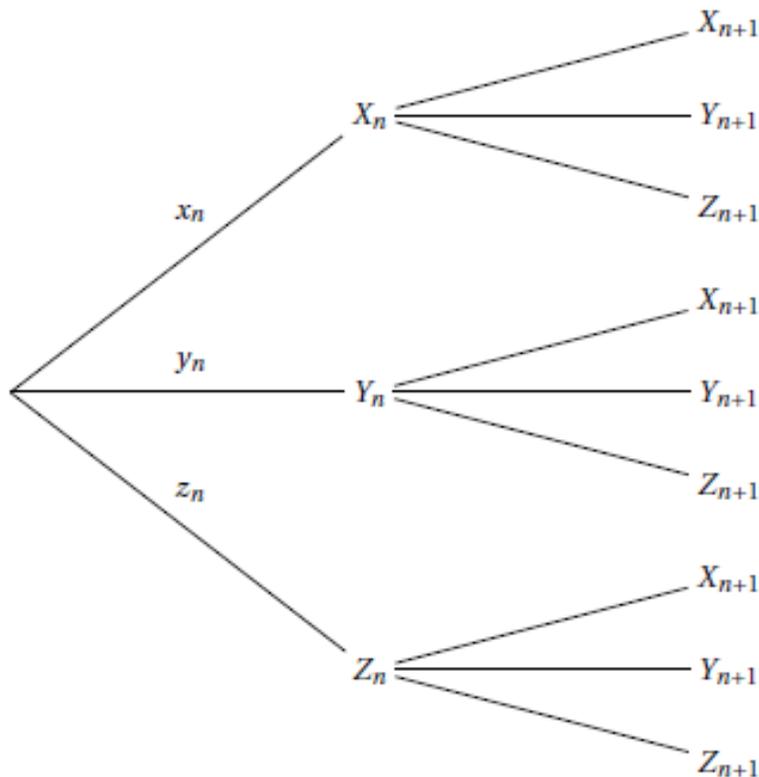
- b. Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile?

2. Pour tout entier naturel n , on note :

- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n , Y_n et Z_n .

- Donner les probabilités x_0 , y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.
- Justifier que $P_{X_n}(X_{n+1}) = \frac{1}{3}$.
- Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :



d. Pour tout entier naturel n , exprimer z_n en fonction de x_n et y_n .

e. En déduire que, pour tout entier naturel n , $y_{n+1} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}$.

f. On pose, pour tout entier naturel n , $b_n = y_n - \frac{1}{2}$.

Montrer que la suite (b_n) est géométrique.

En déduire que, pour tout entier naturel n , $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

g. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

Interpréter le résultat.*