

III. Limite finie ou infinie d'une suite.

1) Limite infinie

Exemple : La suite (u_n) définie sur N par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$. En effet, les termes de la suite deviennent aussi grand que l'on souhaite à partir d'un certain rang. Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définition

- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]a; +\infty[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty; b[$, b réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

☑ Savoir-faire : Savoir utiliser un algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = 4u_n$. Cette suite est croissante et admet pour limite $+\infty$. Ecrire un algorithme permettant de préciser le rang à partir duquel la suite est supérieure à A .

Langage naturel

Entrée

Saisir le réel A

Initialisation

Affecter à n la valeur

Affecter à u la valeur

Traitement des données

Tant que $u \leq A$

Faire

Affecter à n la valeur

Affecter à u la valeur

Sortie

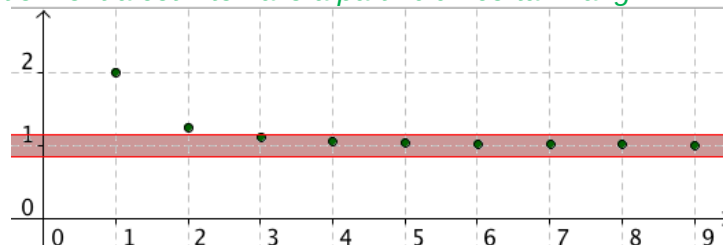
Afficher n

En appliquant cet algorithme avec $A = 100$, on obtient en sortie $n = \dots$.
A partir du terme $\dots$, la suite est supérieure à 100.
En langage calculatrice, cela donne :

TI	CASIO
PROGRAM:SEUIL	=====SEUIL
:Input A	"A=" ?>A↵
:0→N	0→N↵
:2→U	2→U↵
:While U<A	While U<A↵
:N+1→N	N+1→N↵
:4×U→U	4×U→U↵
:End	WhileEnd↵
:Disp N	N

2) Limite finie

Exemple : La suite (u_n) définie sur N^* par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ a pour limite 1. En effet, les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang. Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.



Définition

On dit que la suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$.

Une telle suite est dite convergente.

Définition

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.