

EXERCICE 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_0 = v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + v_n.$$

On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls.

Partie A : Conjectures

Flore a calculé les premiers termes des suites à l'aide d'un tableur.

Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	3
4	2	19	13
5	3	77	51
6	4	307	205

- Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des suites ?
- Soit n un entier naturel.
Conjecturer la valeur de $\text{PGCD}(u_n ; v_n)$. Aucune justification n'est demandée.
- Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Flore obtient les résultats suivants :

12	10	1 258 291	838 861
13	11	5 033 165	3 355 443
14	12	20 132 659	13 421 773
15	13	80 530 637	53 687 091

Elle émet la conjecture : « la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge ».

Qu'en penser ?

Partie B : Étude arithmétique

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :
 $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$.
- Soit n un entier naturel.
Déduire de la question précédente la valeur de $\text{PGCD}(u_n ; v_n)$.

Partie C : Étude matricielle

Pour tout entier naturel n , on définit :

- la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$,
- les matrices carrées $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3 \times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}$.

1. a. Montrer que la matrice $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P .

b. On admet que, pour tout entier naturel n , on a $X_n = Q_n P^{-1} X_0$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a
$$\begin{cases} u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 3 \times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n = \frac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5} \end{cases}$$

2. a. Vérifier que, pour tout entier naturel n , on a
$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} + 3}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} + 2}.$$

b. En déduire la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.