Combinatoire et dénombrement.

Edouard Lucas *(1842 ; 1891) mathématicien français connu notamment pour ses travaux sur les nombres premiers. Il participe au développement des « récréations mathématiques ».*

I. Notion de dénombrement sur un ensemble fini.

☺ Ensemble fini et cardinal.

Définition :
On dit qu'un ensemble E est fini lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.
Le nombre d'éléments de E est appelé le cardinal de l'ensemble et il est noté : $Card(E)$ ou $|E|$.

Remarques :
☺ L'ensemble $E = \{a; b; e; f; l\}$ est un ensemble fini à ...5... éléments. $Card(E) =$ ...5...
☺ Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ est un ensemble fini de cardinal ...0...
☺ Certains ensembles ne sont pas finis : $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, les multiples de 3, les nombres de $[0;1]$

Définition :
Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments que contient un ensemble fini, c'est à dire en déterminer le cardinal.

☺ Principe additif.

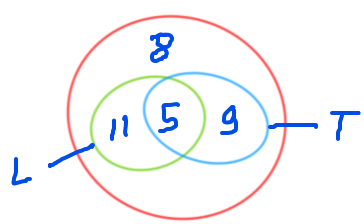
Définition : On dit que deux ensembles sont disjoints s'ils ont aucun élément en commun.

Propriété : Soit $E_1, E_2, \dots, E_n$, n ensembles finis deux à deux disjoints
Alors $Card(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = Card(E_1) + Card(E_2) + \cdots + Card(E_n)$.

Exemple : Soit $E_1 = \{a\,;b\,;c\,;d\}$ et $E_2 = \{\alpha\,;\beta\,;\gamma\}$
$E_1 \cap E_2 = \emptyset$ E_1 et E_2 sont disjoints ... $E_1 \cup E_2 = \{a;b;c;d;\alpha;\beta;\gamma\}$ $card(E_1 \cup E_2) = 7$

☑ *Savoir-faire : Savoir dénombrer en utilisant un diagramme :*

Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre.
On sait que, 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n'en pratiquent aucune. Calculer le nombre d'élèves de cette classe
Soit L l'ensemble des élèves faisant du latin et T ceux qui font du Théâtre ... $Card(L) = 16$ ... $card(T) = 14$ ... $card(L \cap T) = 5$
$Card(\bar{L} \cap \bar{T}) = 8$ à l'aide du diagramme ci-contre, on trouve que l'effectif de la classe est $11 + 9 + 5 + 8 = 33$



Propriété : Soit A une partie d'un ensemble fini E et $\bar{A}$ le complémentaire de A dans E
Alors $Card(E) =$ $card(A) + card(\bar{A})$ ou $card(\bar{A}) = card(E) - card(A)$

☺ Principe multiplicatif.

Définition : Soit E et F deux ensembles non vides.
Le produit cartésien de E par F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$.
Lorsque les ensembles E et F sont finis, $card(E \times F) =$ Card(E) × Card(F).
Si on effectue un produit cartésien d'un ensemble sur lui-même, on note $E \times E = E^2$.

Exemple : $E = \{a\,;b\,;c\}$ et $F = \{1\,;2\}$ alors :
$E \times F = \{(a;1)\,;(a;2)\,;(b;1)\,;(b;2)\,;(c;1)\,;(c;2)\}$
$F \times E = \{(1;a)\,;(1;b)\,;(1;c)\,;(2;a)\,;(2;b)\,;(2;c)\}$

Définition : Soit k un entier supérieur ou égal à 2, et $E_1, E_2, \dots, E_k$, k ensembles finis non vides.
Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k$ est l'ensemble des k-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ où $a_i \in E_i$, $\forall\ 1 \leq i \leq k$.
Et on a : $Card(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) =$ Card(E₁) × Card(E₂) × ..... × Card(Eₚ).

☑Savoir-faire : Savoir appliquer le principe multiplicatif pour dénombrer :

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts.
a) Combien de menus différents composés d'une entrée, d'un plat et d'un dessert peut-on constituer ?
b) Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

a) Soit E l'ensemble des entrées, P l'ensemble des plats et D l'ensemble des desserts.
Un menu est un triplet de E×P×D. il y a card(E)×card(P)×card(D) = 3×4×2 = 24 menus possibles.
b) Si card(D) = 1 il y a 3×4×1 = 12 menus possibles.

Propriété : Soit un ensemble fini E à n éléments. $E^k = E \times E \times \dots\dots\dots \times E$ l'ensemble des k-uplets d'éléments de E. Alors $Card(E^k) =$ Card(E)ᵏ

☑Savoir-faire : Savoir dénombrer le nombre de k-uplets d'un ensemble à n éléments :

Un digicode est composé de 2 lettres et de 10 chiffres. Détermine le nombre de possibilités.

Soit L l'ensemble des lettres et C l'ensemble des chiffres.
le nombre de codes possibles est Card(L)² × Card(C)¹⁰
Donc $26^2 \times 10^{10} = 676 \times 10^{10}$ possibilités

II. Arrangements et permutations.

☺ Arrangements.

Définition : Soit E un ensemble à n éléments, k un nombre tel que $1 \leq k \leq n$.
Un arrangement de k éléments de E est un k-uplet d'éléments deux à deux distincts de E.

Dans un arrangement l'ordre des éléments compte et les éléments ne se répètent pas.
Exemple : Soit $E = \{a\,;b\,;c\,;d\,;e\}$

le couple (a;b) est un arrangement à 2 éléments
le triplet (c;a;b) est un arrangement à 3 élément.

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre d'arrangements de k éléments de E est égal à : $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-k+1)$

☑*Savoir-faire : Savoir dénombrer en utilisant les arrangements :*

Pour nettoyer un appareil électrique, Fred débranche les 3 prises qui se trouvent à l'arrière de l'appareil. Mais au moment d'effectuer à nouveau les branchements, il se rend compte qu'il existe 12 positions différentes pour les 3 prises. Comme il n'a pas pris soin de noter les positions respectives des 3 prises et qu'il n'y connait rien en électronique, il décide d'effectuer les branchements au hasard.
Quelle est la probabilité qu'il retrouve le bon branchement ?

Soit E l'ensemble des fiches $\text{card}(E) = 12$.
Un branchement est un arrangement à 3 éléments de E.
il y a $12 \times 11 \times 10 = 1320$ possibilités.
La probabilité de trouver le bon branchement est donc $p = \frac{1}{1320}$

☺ Permutations.

Définition : Soit E un ensemble à n éléments.
Une **permutation** de E est un n-uplet d'éléments deux à deux distincts de E.

Exemple : Soit $E = \{a\,;b\,;c\}$. Les permutations de l'ensemble E sont :
$(a;b;c)$; $(a;c;b)$; $(b;a;c)$; $(b;c;a)$; $(c;a;b)$; $(c;b;a)$

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre de permutations de E est égal à : $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$.

☑*Savoir-faire : Savoir dénombrer en utilisant les permutations :*

Pour une conférence, on a invité 12 scientifiques, 6 hommes et 6 femmes renommés, qui seront placés au premier rang de la salle qui comprend 12 places. On attend 5 mathématiciens, 3 physiciens et 4 biologistes.
C'est le moment de prendre place, l'organisateur demande aux scientifiques de s'installer.
- Les mathématiciens proposent que chacun choisisse une place au hasard.
- Les physiciens préfèrent rester ensemble et qu'ainsi tous les physiciens soient assis côte à côte.
- Les biologistes disent que dans ce cas, il serait mieux que les hommes se placent ensemble et que les femmes en fassent de même.

Calculer le nombre de façons différentes de s'assoir pour chaque proposition.

* mathématiciens : permutations d'un ensemble à 12 éléments $12 \times 11 \times 10 \times \dots \times 1 = 479\,001\,600$
* physiciens : les physiciens sont 3 et ont 10 possibilités de choisir leurs sièges côte à côte.
Pour chaque possibilité, il y a autant de façons pour eux de choisir leur siège que de permutations d'un ensemble à 3 éléments
et les autres sièges correspondent aux permutations d'un ensemble à 9 éléments donc $10 \times 3 \times 2 \times 9 \times 8 \times \dots \times 1 = 21\,772\,800$
* biologistes : $2 \times 6 \times 5 \times \dots \times 1 \times 6 \times 5 \times \dots \times 1 = 1\,036\,800$

☺ La factorielle d'un nombre.

Définition : On appelle factorielle n le produit de tous les nombres entiers de 1 à n.
Et on note : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$

Exemple :
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ $\quad 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ $\quad 5! = 5 \times 4! = 120$
$0! = 1$ $\quad 1! = 1$

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.
Le nombre d'arrangements de k éléments de E est égal à : $\frac{n!}{(n-k)!}$
Le nombre de permutations de E est égal à : $n!$

III. Combinaisons.

☺ Combinaisons.

Définition : Soit E un ensemble à n éléments, k un nombre tel que $0 \leq k \leq n$.
On appelle combinaison de k éléments de E un sous-ensemble de E ayant k éléments.

Exemple : On considère l'ensemble $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$.
Le sous-ensemble $\{1 ; 2 ; 3\}$ est appelée une combinaison de E à 3 éléments.
Le sous-ensemble $\{2 ; 5\}$ est appelée une combinaison de E à 2 éléments.

Attention : ne pas confondre une combinaison de k éléments de E et un k-uplet d'éléments de E.
Une combinaison est un sous-ensemble, un k-uplet est un élément de E^k.

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments, k un nombre tel que $0 \leq k \leq n$.
Le nombre de combinaisons de k éléments de E, noté $\binom{n}{k}$ est égal à :

$$\binom{n}{k} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Cas particuliers : Pour tout entier naturel n : $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$ $\binom{n}{1} = n$

☑ *Savoir-faire : Savoir dénombrer en utilisant les combinaisons :*

Une classe composée de 18 filles et 16 garçons va élire les 4 délégués. Dans cet exercice, on ne distingue pas les délégués et les délégués-adjoints.
a) Combien existe-t-il de possibilités pour cette élection ?
b) Emma dit qu'elle ne souhaite pas être élue si Bastien est élu. Dans ces conditions, combien existe-t-il de possibilités ?

a) le nombre de combinaisons de 4 élèves parmi 34 est
$\frac{34!}{4!30!} = \frac{34\times33\times32\times31\times\cancel{30\times\ldots\times1}}{4\times3\times2\times1\times\cancel{30\times29\times\ldots\times1}} = 46376$

b) Comptons les possibilités pour que Emma et Bastien soient élus ensemble
il reste 2 combinaisons parmi 32 élèves restants $\frac{32!}{2!30!} = \frac{32\times31}{2} = 496$
Donc il reste $46376 - 496 = 45880$ possibilités.

☺ Coefficients binomiaux.

Le nombre $\binom{n}{k}$ de combinaisons de k parmi n porte également le nom de coefficient binomial.

Propriété de symétrie : Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$: $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

Propriété du triangle de Pascal :

Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$: $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Démonstration exigible :

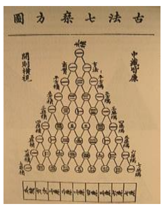
$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ $\binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$

$\frac{k\times(n-1)!}{k\times(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)\times(n-1)!}{(n-k)k!(n-1-k)!} = \frac{n\times(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

☑*Savoir-faire : Savoir calculer des coefficients binomiaux :*

Calcule les coefficients binomiaux : ☺ $\binom{25}{24}$ ☺ $\binom{4}{2}$

$\binom{25}{24} = \frac{25!}{24!\times1!} = 25$ $\binom{4}{2} = \binom{3}{2}+\binom{3}{1} = 3+3 = 6$



☺ Le triangle de Pascal.

Le tableau qui suit se complète de proche en proche comme combinaisons répondant à la propriété du triangle de Pascal.
Le triangle de Pascal peut être utilisé par exemple pour déterminer rapidement les coefficients binomiaux.

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	$\boxed{3}$	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

$\binom{3}{2} = \binom{2}{1}+\binom{2}{2} = 2+1 = 3$

On retrouve les coefficients binomiaux dans les développements $(a+b)^n$.

☺ Parties d'un ensemble.

Propriété: Soit E un ensemble à n éléments.

Le nombre de sous-ensemble de E est égal à : $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n} = 2^n$

Démonstration exigible :

* le nombre de sous ensembles de E est la somme du nombre d'ensembles à 0 éléments puis 1 ...
donc $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}$.
* pour chaque élément on peut choisir entre il appartient au sous ensemble ou non, donc 2^n possibilités.