Loi binomiale.

Jacques Bernoulli *(1655 ; 1705) mathématicien suisse. La parution posthume de « l'Ars Conjectandi » (1713) marque une rupture dans l'histoire des probabilités.*

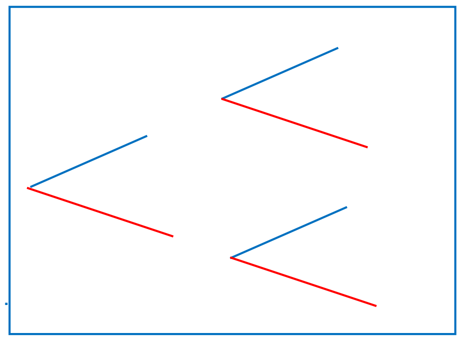
I. Répétition d'expériences indépendantes.

☺ On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).
☺ Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience 10 fois de suite. Ces expériences sont identiques et indépendantes.

Définition : Plusieurs expériences sont identiques et indépendantes si :
☺ elles ont les mêmes issues ☺ chaque issue possède la même probabilité dans chaque expériences.

☑ *Savoir-faire : Savoir représenter la répétition d'expériences identiques et indépendantes :*

On considère l'expérience suivante :
Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges.
On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne.
On répète l'expérience deux fois de suite.
1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2) Déterminer la probabilité : a) d'obtenir deux boules blanches.
b) une boule blanche et une boule rouge
c) au moins une boule blanche.



…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

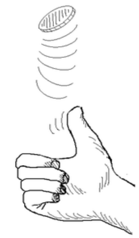
Propriété : Lorsqu'on répète n fois de façon indépendante une expérience aléatoire dont les issues $A_1, A_2, \dots, A_n$ ont pour probabilité $p(A_1), p(A_2), \dots, p(A_n)$, alors la probabilité d'obtenir la suite d'issues $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est égale aux produits de leurs probabilités $p(A_1) \times p(A_2) \times \dots \times p(A_n)$.

☑ *Savoir-faire : Savoir exploiter une succession d'épreuves indépendantes :*

Le cuisinier d'un bateau pioche pour chaque repas au hasard dans le placard à féculents qui contient 200 sacs de riz et 300 sacs de pâtes, puis dans le placard à conserves qui contient 300 boites de thon, 200 boites de viande de veau et 100 boites de bœuf.
1) A l'aide du produit cartésien, lister tous les menus possibles.
2) Déterminer la probabilité de chacun des menus.

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

II. Épreuve de Bernoulli, Schéma de Bernoulli.



☺ Épreuve de Bernoulli.

Définition : Soit p un réel compris entre 0 et 1.
On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p une expérience aléatoire à deux issues : l'une nommé "succès" , notée S, de probabilité p et l'autre "échec" notée $\bar{S}$.

Exemples :
……
……
……

Définition : Soit une épreuve de Bernoulli de paramètre p , soit X la variable aléatoire prenant la valeur 1 en cas de succès et la valeur 0 en cas d'échec, on dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, donnée par le tableau ci-contre :

x_i	1	0
$P(X = x_i)$		

Propriété :
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors :
$E(X) =$ ……… $V(X) =$ ………………

……
……

☺ Schéma de Bernoulli.

Définition : Un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes pour lesquelles la probabilité du succès est p.

Remarques :
☺ Pour la répétition de n épreuves de Bernoulli, l'univers est $\{0, 1\}^n$.
☺ La répétition de 10 lancers d'une pièce est un schéma de Bernoulli de paramètres n = …… et p =……

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer des probabilités avec un schéma de Bernoulli :*

On réalise un schéma de Bernoulli de paramètres 3 et 0,4.
Soit X la variable aléatoire associée au nombre de succès obtenus.
Établir la loi de probabilité de X.
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

Propriété : Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , la probabilité d'un chemin ayant exactement k succès $(0 \leq k \leq n)$ est ....

Propriété : Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , le nombre de chemins ayant exactement k succès $(0 \leq k \leq n)$ est ....

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer des probabilités avec un schéma de Bernoulli :*

On réalise un schéma de Bernoulli de paramètres 10 et 0,4.
Calcule la probabilité d'un chemin ayant exactement 6 succès.
Calcule le nombre de chemins ayant exactement 6 succès.
En déduire la probabilité d'avoir exactement 6 succès.
....
....
....

III. Loi binomiale.

Définition : On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p
et X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenus dans ce schéma.
On dit alors que X suit la loi binomiale de paramètres n et p, on note $B(n\,;p)$.

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer une loi binomiale :*

Soit X la variable aléatoire qui suit $B(3\,;p)$.
Établir la loi de probabilité de X.
....
....
....
....
....
....

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n\,;p)$, alors

Pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n$, on a : $P(X = k) =$...

Démonstration exigible :

....
....

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer une probabilité en utilisant la loi binomiale :*

1) Dans un jeu de 52 cartes, on tire 100 cartes avec remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 30 fois un roi ?
....
....

2) *Dans un lycée 90% des éléves ont un téléphone. On interroge 100 éléves.*
Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 50 possesseurs d'un téléphone ?
....
....

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n\,;p)$, alors

☺ $E(X) =$........... ☺ $V(X) =$............... ☺ $\sigma(X) =$...............

Démonstration exigible :

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer l'espérance et l'écart type d'une loi binomiale :*

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(10\,;0.5)$, calcule $E(X)$ et $\sigma(X)$. Interprète le résultat.

....

....

....

☺ Utiliser des outils pour la loi binomiale.

On considère l'expérience aléatoire « on lance une pièce de monnaie équilibrée ». On répète l'expérience 20 fois. Soit X, la variable aléatoire qui compte le nombre de « Pile » obtenus. Les expériences sont identiques et indépendantes, X suit donc la loi binomiale ....On utilise un tableur pour obtenir la loi de probabilité de X :

Loi binomiale de paramétres n=20 et p=0,5.

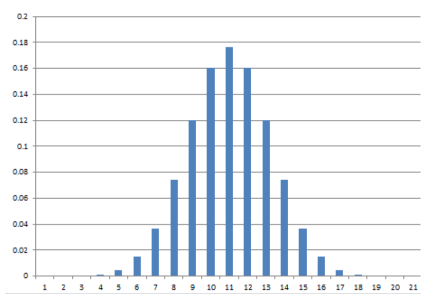
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
p(X=k)	9.53674E-07	1.907E-05	2E-04	0.001	0.005	0.015	0.037	0.074	0.12	0.16	0.176	0.16	0.12	0.074	0.037	0.015	0.005	0.001	2E-04	2E-05	1E-06

A l'aide du tableau, déterminer $p(X=12)$; $p(X=18)$; $p(X \leq 3)$; $p(6 \leq X \leq 9)$

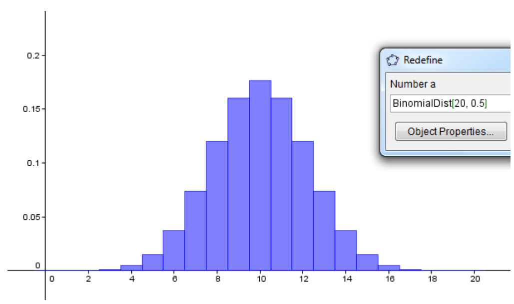
....

On peut représenter la loi binomiale par un diagramme en bâtons

☺ Avec le tableur :



☺ Avec le tableur géogébra :



Remarque : L'espérance de la loi binomiale $B(40\,,0{,}5)$ est .... cela correspond à

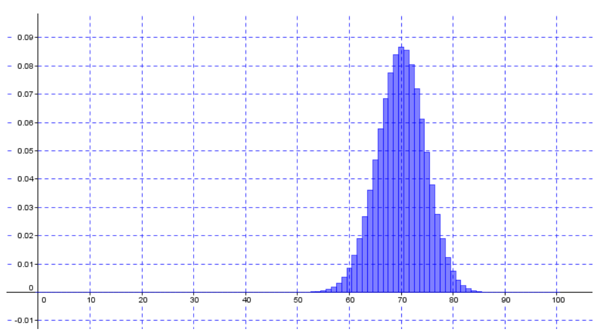
....

....

....

....

☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser un diagramme en bâton qui représente la loi binomiale :*



1) On a représenté par un diagramme en bâton une loi binomiale de paramètre n et p. On sait que n=100 et que son espérance est 70. Calcule p.

....

....

2) Imagine un énoncé qui soit cohérent avec cette représentation.

....

....