Baccalauréat S Centres étrangers 12 septembre 2014

EXERCICE 2 — 4 points

Commun à tous les candidats

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 16 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. **a.** Calculer z_1, z_2 et z_3.

   b. Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique de l'**annexe, à rendre avec la copie.**

   c. Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ sous forme trigonométrique.

   d. Démontrer que le triangle $\mathrm{O}A_0A_1$ est isocèle rectangle en A_1.

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   La suite (r_n) est-elle convergente ?
   Interpréter géométriquement le résultat précédent.
   On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.
   Ainsi $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

   b. Donner une expression de L_n en fonction de n.

   c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

A4 Annexe à rendre avec la copie

Annexe relative à l'exercice 2