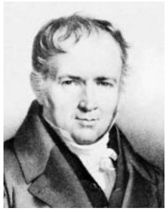

Concentration, loi des grands nombres.

***Denis Poisson** (1781 ; 1840) mathématicien français « Les choses de toutes natures sont soumises à une loi universelle qu'on peut appeler la loi des grands nombres ».*

I. Transformations de variables aléatoires.

☺ Somme de variables aléatoires.

Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires, $X+Y$ est la variable aléatoire qui prend pour valeur les valeurs possibles de X et de Y.

Propriété : Soit X et Y deux variables aléatoires. La loi de probabilité de la variable aléatoire $X+Y$ est donnée par : $P(X+Y=k)=\sum_{i+j=k} P((X=i)\cap(Y=j))$.

☑ Savoir-faire : Savoir déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires :

On considère le jeu suivant : On lance une pièce puis on lance un dé.
- Pour la 1ère étape, si on tombe sur « pile », on gagne 1 €, si on tombe sur « face », on gagne 2 €.
- Pour la 2e étape, si on tombe sur un chiffre pair, on gagne 1 €, sur le « 3 » ou le « 5 », on gagne 2 €. Si on tombe sur le « 1 », on perd 5 €.

La variable aléatoire X désigne les gains à la 1ère étape, la variable aléatoire Y ceux de la 2e étape.
On considère que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire $S=X+Y$ donnant le gain total cumulé.

....
....
....
....
....
....
....

☺ Combinaison linéaire de variables aléatoires.

Définition : Soient a et b deux nombres réels, et $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ une variable aléatoire.
$Y=aX+b$ est la variable aléatoire qui prend pour valeur ax_i+b pour $1\leq i\leq n$.

☺ Espérance et variance de combinaisons linéaires de variables aléatoires.

Propriété : Soit X et Y deux variables aléatoires, a et b deux nombres réels.
☺ $E(aX+b)=aE(X)+b$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$
☺ $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
☺ $V(aX+b)=a^2V(X)$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$
☺ Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes : $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

....
....
....
....

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la loi d'une somme de variables aléatoires :*

On considère le jeu consistant à lancer 20 fois un dé :
À chaque lancer on gagne 6 € si on obtient un « 5 » ou un « 6 », on gagne 3 € sinon.
La participation au jeu est de 70 €.
Quel gain peut-on espérer ? Quelle est la variance du gain ?

....

....

....

....

....

....

....

II. Variable aléatoire moyenne.

Définition : On considère n expériences aléatoires identiques et indépendantes.
On note $X_1, X_2, \dots, X_n$ les variables aléatoires associées à ces expériences, toutes de même loi.
La variable aléatoire moyenne des variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ est $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

Exemples :

....

....

....

....

....

....

....

Propriété : $E(M_n) = E(X)$ $\quad V(M_n) = \frac{1}{n}V(X)$ $\quad \sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire moyenne:*

On considère la variable aléatoire X qui prend, de façon équiprobable, les valeurs –4, 0, 1, 3 et 6.
M_{50} est la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille 50 de la loi de X.
Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de M_{50}.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

III. Inégalité de Markov.

Propriété (inégalité de Markov) : Soit une variable aléatoire X à valeur positive.
Pour tout réel a strictement positif, on a : $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

....
....

IV. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Propriété : Soit une variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif δ, on a : $P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$

....
....

☑ *Savoir-faire : Savoir appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :*

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}1$.
1) Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\delta = 2\sigma(X)$. Interpréter.
2) Recommencer avec $\delta = 3\sigma(X)$, puis $\delta = 4\sigma(X)$. Que constate-t-on ?
3) a) Simuler N valeurs de la variable aléatoire X par une fonction en Python dans le but d'estimer la probabilité $P(|X - 2| \geq 2\sigma(X))$.
On testera le programme pour différentes valeurs de N.
b) Au regard des résultats obtenus par le programme, peut-on penser que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev a un caractère optimal ?

V. Inégalité de concentration.

Propriété : Soit la variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif δ, on a : $P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\,\delta^2}$

☑ *Savoir-faire : Savoir appliquer l'inégalité de concentration pour déterminer la taille d'un échantillon :*

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi de Bernoulli de paramètre 0,2.
On considère un échantillon de n variables aléatoires suivant la loi de X.
On appelle M_n la variable aléatoire moyenne associée à cet échantillon.
Déterminer la taille n de l'échantillon tel que la probabilité que la moyenne M_n appartienne à l'intervalle $]0{,}03\,;0{,}37[$ soit supérieure à 0,95.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

V. Loi des grands nombres.

Propriété : Soit la variable aléatoire moyenne M_n d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.
Pour tout réel strictement positif δ, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....