Suites bornées et convergence monotone.

I. Suites majorées, minorées, bornées.

Définition

- La suite (u_n) est <u>majorée</u> s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est <u>minorée</u> s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
- La suite (u_n) est <u>bornée</u> si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :
- Les suites de terme général cos n ou $(-1)^n$ sont …………………..
- La suite de terme général n^2 est minorée par ………..

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la limite d'une suite géométrique :*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ *et* $u_0 = 2$. *Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.*

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

II. Convergence des suites monotones.

Propriété

Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ alors la suite (u_n) est majorée par L.

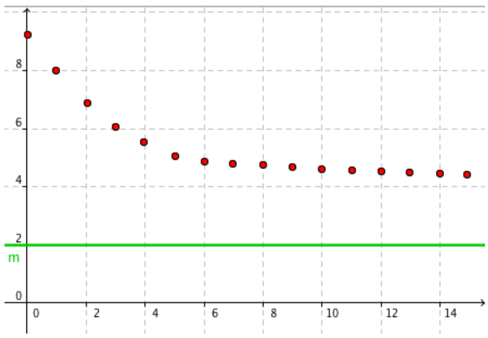
<u>Démonstration par l'absurde :</u>

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Théorème de convergence monotone *- Admis -*

- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

Remarque :
Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.
Dans l'exemple ci-contre, la suite décroissante est minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 2 mais n'est pas nécessairement égale à 2.



☑ *Savoir-faire : Savoir utiliser le théorème de convergence monotone :*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ *et* $u_0 = 2$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………