

devoir de mathématiques n°4*Durée : 2 heures. Calculatrice autorisée.***Exercice I. Nombre dérivé et équation de tangente**

(2 points)

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 3x - 1$

1. Détermine par la définition le nombre dérivé de f en 2.
2. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point qui a pour abscisse 2.

Exercice II. Étude d'une fonction du 3° degré

(4 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$.

1. Détermine une racine évidente de f .
2. En déduire une expression factorisée de $f(x)$.
3. Combien de solution à l'équation $(E) : f(x) = 0$? justifie ta réponse.
4. Détermine l'expression de $f'(x)$.
5. Établir le tableau de signes de $f'(x)$, en déduire le tableau de variations de f .
6. Précise les extrémums locaux de f .

Exercice III. Calcul de l'expression d'une fonction dérivée

(2 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x-2}{x^2+1}$

1. Justifie pourquoi f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Détermine l'expression de $f'(x)$.

Exercice IV. Trigonométrie

(2 points)

1. Donne les valeurs suivantes :

$$\cos(\pi) \quad \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \quad \cos\left(\frac{51\pi}{2}\right)$$

2. Dans un cercle trigonométrique explique comment construire sans rapporteur un angle de 60°
3. Résoudre l'équation : $(E) : \cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice V. Généralité sur les suites numériques

(2 points)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 2n^2 + 3n - 4$

1. Prouve que (u_n) n'est pas une suite arithmétique.
2. Prouve que (u_n) n'est pas une suite géométrique.
3. Calculer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n .
4. En déduire les variations de la suite (u_n) .

Exercice VI. Suites arithmétiques

(2 points)

 (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_5 = 11$ et $u_{12} = 32$ Détermine son premier terme u_0 et sa raison.

Exercice VII. Somme des termes**(2 points)**

Calcule les sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 200$$

$$S_2 = 3 + 6 + 9 + \dots + 120$$

$$S_3 = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{10}$$

Exercice VIII. Une suite arithmético géométrique**(4 points)**

En 2010, année de sa création, un club de randonnée pédestre comportait 80 adhérents.

Chacune des années suivantes on a constaté que :

- 10% des participants ne renouvelaient pas leur adhésion au club ;
- 20 nouvelles personnes s'inscrivaient au club.

On suppose que cette évolution reste la même au fil des ans.

On considère la suite (u_n) définie par u_n est le nombre d'adhérents en 2010 + n .

Donc $u_0 = 80$.

1. Calcule u_1 et u_2 .
2. Prouve que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3. Explique pourquoi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9 u_n + 20$.
4. Pour tout entier naturel n , on pose : $v_n = u_n - 200$.
 - a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n .
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 200 - 120 \times 0,9^n$.
5. L'objectif du président du club est d'atteindre au moins 180 adhérents. Cet objectif est-il réalisable ?
6. Même question si l'objectif du président du club est d'atteindre au moins 300 adhérents.