

# Ensembles de nombres.



*Pythagore de Samos est un mathématicien, astronome et philosophe grec du VI<sup>e</sup> siècle avant J-C. Il pense que « tout est nombre ».*



## I. L'ensemble des nombres entiers naturels : $\mathbb{N}$ .

**Définition :** Un nombre entier naturel est un nombre qui peut s'écrire sans virgule et qui est positif.  
L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté  $\mathbb{N}$ .

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$        $12,0 = 12 \in \mathbb{N}$        $12,1 \notin \mathbb{N}$   
 $\mathbb{N}$  a un plus petit élément 0       $\mathbb{N}$  n'a pas de plus grand élément  
 $0 \in \mathbb{N}$  ;  $1 \in \mathbb{N}$  ;  $4 \in \mathbb{N}$  ;  $-2 \notin \mathbb{N}$       ( le symbole  $\in$  se lit "appartient à" )

## II. L'ensemble des nombres entiers relatifs : $\mathbb{Z}$ .

**Définition :** Un nombre entier relatif est un nombre entier qui est positif ou négatif.  
L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté  $\mathbb{Z}$ .

$\mathbb{Z} = \{\dots; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$   
 $\mathbb{Z}$  n'a ni plus grand ni plus petit élément  
 $3 \in \mathbb{Z}$  ;  $-2 \in \mathbb{Z}$  ;  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$  ;  $3,2 \notin \mathbb{Z}$       ( le symbole  $\subset$  se lit "est inclus dans" )

## III. L'ensemble des nombres décimaux : $\mathbb{D}$ .

**Définition :** Un nombre décimal est un nombre de la forme  $\frac{a}{10^p}$ , avec  $a \in \mathbb{Z}$  et  $p \in \mathbb{N}$ . Un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. L'ensemble des **nombres décimaux** est noté  $\mathbb{D}$ .

$12 = \frac{12}{1} = \frac{12}{10^0} \in \mathbb{D}$  ( $a=12; p=0$ )       $28,32 = \frac{2832}{100} = \frac{2832}{10^2} \in \mathbb{D}$  ( $a=2832; p=2$ )  
 Attention, un résultat sur la calculatrice est un nombre décimal...  
 $3 \in \mathbb{D}$  ;  $-2 \in \mathbb{D}$  ;  $3,2 \in \mathbb{D}$  ;  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$  ;  $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$  ;  $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ .

**Propriété :**  $\frac{1}{3}$  n'est pas un nombre décimal.

*Démonstration exigible :*

Raisonnement par l'absurde : Si  $\frac{1}{3}$  est un nombre décimal alors  $\exists a \in \mathbb{Z}$  et  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$   
 Donc  $10^p = a \times 3$       Donc  $10^p$  est un multiple de 3. Ce qui n'est pas possible (c'est absurde)  
 Donc  $\frac{1}{3}$  n'est pas un nombre décimal !

## IV. L'ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q}$ .

**Définition :** Un nombre rationnel est un nombre sous la forme d'un quotient  $\frac{p}{q}$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}$ .  
L'ensemble des **nombres rationnels** est noté  $\mathbb{Q}$ .

$12 = \frac{12}{1} \in \mathbb{Q}$        $13,25 = \frac{1325}{100} \in \mathbb{Q}$       (un nombre rationnel a une séquence de chiffres qui se répète)  
 $3 \in \mathbb{Q}$  ;  $-2 \in \mathbb{Q}$  ;  $3,2 \in \mathbb{Q}$  ;  $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$  ;  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$  ;  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ .

**Propriété :**  $\sqrt{2}$  n'est pas un nombre décimal.

**Démonstration exigible :** Démonstration par l'absurde.

On suppose de  $\sqrt{2}$  soit un nombre rationnel :  $\exists p \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{N}$  tels que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  On suppose cette fraction irréductible

Si  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  alors  $p = \sqrt{2}q$  donc  $p^2 = 2q^2$  donc  $p^2$  est pair donc  $p$  est pair (voir ch. arithmétique.)

Si  $p$  est pair alors  $p = 2p'$  donc  $p^2 = 2q^2$  donne  $(2p')^2 = 2q^2$  donc  $4p'^2 = 2q^2$  donc  $2p'^2 = q^2$

Donc  $q^2$  est pair  $\Rightarrow q$  est pair. (Si  $q$  est pair et  $p$  est pair alors la fraction  $\frac{p}{q}$  n'est pas irréductible !)

Donc  $\sqrt{2}$  ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction.

**Le secret de Pythagore :** les mathématiciens grecs connaissent les nombres rationnels, découvrir un nombre qui n'est pas rationnel leur montre qu'il y a un ensemble de nombres plus grand que le leur. ne connaissent pas !!

### V. L'ensemble des nombres réels : $\mathbb{R}$ ...

**Définition :** L'ensemble des **nombres réels** est noté  $\mathbb{R}$ , est l'ensemble de tous les nombres connus en seconde.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Remarque : Il existe un ensemble de nombres plus grand qui est au programme de Terminale, (Méthodes expertes) l'ensemble des nombres complexes. On le note  $\mathbb{C}$ .

### VI. Conclusion.

