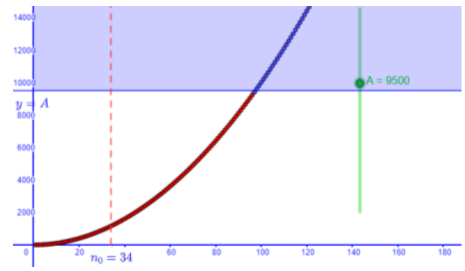
Limite d'une suite.

Srinivasa Ramanujan *(1887 ; 1920) est un mathématicien indien autodidacte. À sa mort, il laisse des cahiers de résultats mathématiques non démontrés.*

I. Limite finie ou infinie d'une suite.



☺ Limite infinie

On considère la suite (u_n) définie sur N par $u_n = n^2$.
On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite :

n	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	1	4	9	16	25	100	2500	10000

Les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite à partir d'un certain rang.
Soit $A = 1\,000\,000$, $\forall n \geq$ 1000..., $u_n \geq A$.   *Soit $A =$ 10^{12}..., $\forall n \geq$ 10^6..., $u_n \geq A$.*

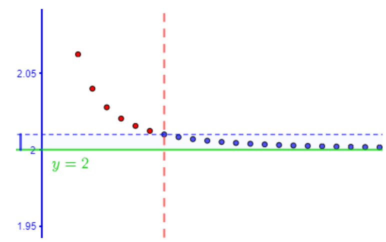
$\forall A, \exists n_0 \,/\, \forall n \geq n_0 \quad u_n \geq A$

Soit A un réel quelconque, l'intervalle $]\,A\,;+\infty\,[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. On écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]\,A\,;+\infty\,[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty\,;B[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

☺ Limite finie



On considère la suite (u_n) définie sur N par $u_n = 2 + \frac{1}{n}$.*
On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite :

n	1	2	3	4	5	10	15	50	500
u_n	3	2,5	2,333	2,25	2,2	2,1	2,067	2,02	2,002

Plus *n* devient grand, plus les termes de la suite semblent se rapprocher de 2.
Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.
On dit que la suite (u_n) est convergente et a pour limite 2 lorsque n tend vers $+\infty$. On écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

Définition : Soit l un nombre réel. On dit qu'une suite (u_n) a pour limite l lorsque n *tend vers* $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit alors que (u_n) *est* convergente ... *et* que sa limite est l ... On écrit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

Remarques :

☺ Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

☺ Certaines suites divergent et n'ont pas de limite.

Ex : $u_n = (-1)^n$ $u_n = \sin(n)$ n'ont pas de limite.

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer un seuil avec un algorithme :*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 4u_n$ et $u_0 = 2$.

Complète les algorithmes puis détermine le rang à partir duquel les termes sont supérieurs à 100 .

Langage naturel
Entrée Saisir le réel A $a = 100$ **Initialisation** Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2 **Traitement des données** Tant que u < A Faire Affecter à n la valeur n+1 Affecter à u la valeur 4×u **Sortie** Afficher n

Avec une calculatrice

TI	CASIO
PROGRAM:SEUIL :Input A :0→N :2→U :While U<A :N+1→N :4×U→U :End :Disp N	======SEUIL "A="?→A↵ 0→N↵ 2→U↵ While U<A↵ N+1→N 4×U→U WhileEnd↵ N

En Python

```
def seuil(a):
    n=0
    u=2
    while u<a:
        n= n+1
        u= 4*u
    return(n)
```

le programme Seuil : donne le plus petit entier naturel n_0 tel que $U_{n_0} \geq 100$.

II. Limites des suites usuelles.

Propriété :

☺ $\lim\limits_{n \to +\infty} n =$ $+\infty$ ☺ $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 =$ $+\infty$ ☺ $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} =$ $+\infty$ ☺ $\lim\limits_{n \to +\infty} n^3 =$ $+\infty$

☺ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} =$ 0 ☺ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} =$ 0 ☺ $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} =$ 0

III. Opérations sur les limites de suites.

☺ Limite d'une Somme :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	$l\,'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n + v_n =$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 = -\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2n^2 + (-n^2) = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + (-2n^2) = -\infty$

☺ Limite d'un Produit :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	$l\,'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n =$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

$\lim\limits_{n \to +\infty} n \times \frac{1}{n} = 1$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n \times \frac{1}{n^2} = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \times \frac{1}{n} = +\infty$

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

☺ Limite d'un Quotient :

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$	l	$l \neq 0$	l	∞	∞	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} v_n =$	$l\,' \neq 0$	0	∞	l	∞	0
$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{l}{l'}$	∞	0	∞	FI	FI

A ne jamais écrire

Mais pour comprendre

" $\frac{1}{\infty} = 0$ " " $\frac{1}{0} = \infty$ "

" $\frac{\infty}{\infty} = \infty \times \frac{1}{\infty} = \infty \times 0$ "

☑ Savoir-faire : Savoir déterminer la limite d'une suite par opération :

Détermine les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right)(n^2+3)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{-n^2-3}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + 1 = 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+3 = +\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}+1\right)(n^2+3) = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2-3 = -\infty$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{-n^2-3} = 0$

☑ Savoir-faire : Savoir calculer une limite avec une forme indéterminée :

Déterminer les limites suivantes :

☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 5n + 1$ ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 3\sqrt{n}$ ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$ ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2+n}{n+3}$ ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

$n^2-5n+1 = n^2\left(1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2} = 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-5n+1 = +\infty$

$n-3\sqrt{n} = n\left(1-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\frac{3}{\sqrt{n}}\right) = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n-3\sqrt{n} = +\infty$

$\frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \frac{n^2\left(5+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{3}{n}\right)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 5+\frac{4}{n^2} = 5$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 4+\frac{3}{n} = 4$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n} = \frac{5}{4}$

$\frac{3n^2+n}{n+3} = \frac{\boxed{n^2}\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\boxed{n}\left(1+\frac{3}{n}\right)} = \boxed{n} \times \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2+n}{n+3} = +\infty$

$\sqrt{n+2}-\sqrt{n} \times \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

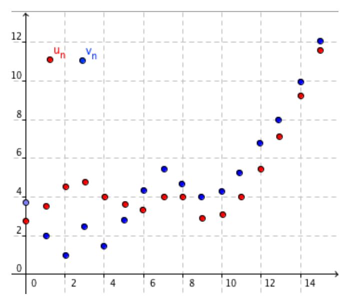
$\frac{\sqrt{n+2}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2}+\sqrt{n} = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = 0$

IV. Limites et comparaisons.

☺ Théorèmes de comparaison :



Théorèmes de comparaison :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ alors :

☺ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$ ....$+\infty$.......

☺ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$ ....$-\infty$..... alors on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ ....$-\infty$....

Démonstration exigible :

Cas particulier

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$

Soit $A \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc

$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, u_n > A$

Or $v_n \geq u_n$ Donc $\forall n \geq n_0$ $v_n > A$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Cas général

$\exists n_1 / \forall n \geq n_1$

$v_n \geq u_n$

il faut poser

$n_2 = \max(n_0 ; n_1)$

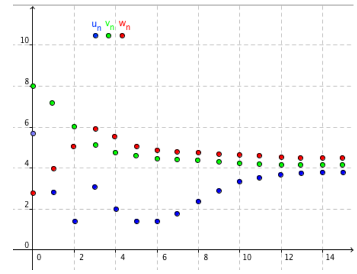
☑ Savoir-faire : Savoir déterminer une limite par comparaison :

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n$

$-1 \leq (-1)^n \leq 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 1 = +\infty$ $\forall n$ $n^2-1 \leq n^2+(-1)^n$

Donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n = +\infty$.

☺ Théorème d'encadrement :



Théorème des gendarmes :
Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ alors :
on peut affirmer que (v_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer une limite par encadrement :*

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n}$

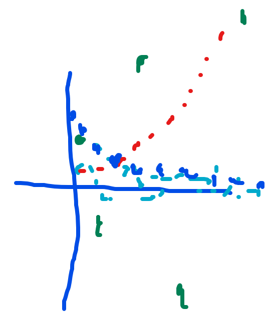
$\forall n$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ donc $1 - \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{\sin(n)}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$; $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ donc d'après le th des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{\sin(n)}{n} = 1$

V. Limite d'une suite géométrique.

☺ Limite de q^n :

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$	pas de limite	0	1	$+\infty$



Démonstration exigible : (cas de $q > 1$)

$q > 1$ donc $\exists a > 0$ tel que $q = 1 + a$ donc $q^n = (1+a)^n$
$(1+a)^n \geq 1 + na$ (inégalité de Bernoulli)
$\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty$ (car $a > 0$)
donc d'après le th de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+a)^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la limite d'une suite géométrique :*

Détermine les limites suivantes : ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n}{3}$ ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 3^n$ ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n}{3}$
$(-2)^n$ n'a pas de limite
$\frac{(-2)^n}{3}$ n'a pas de limite.

$2^n - 3^n = 3^n\left(\frac{2^n}{3^n} - 1\right) = 3^n \times \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 3^n = -\infty$
$\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}$.
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$.

☺ Limite d'une suite arithmético-géométrique :

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la limite d'une suite arithmético-géométrique :*

Détermine les limites suivantes : ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} -3 \times 2^n + 10$ ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 5$

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} -3 \times 2^n = -\infty$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -3 \times 2^n + 10 = -\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 5 = 5$.