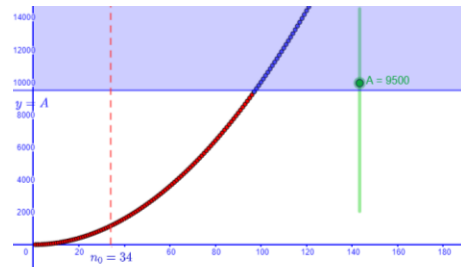
Limite d'une suite.

***Srinivasa Ramanujan** (1887 ; 1920) est un mathématicien indien autodidacte. À sa mort, il laisse des cahiers de résultats mathématiques non démontrés.*

I. Limite finie ou infinie d'une suite.

☺ Limite infinie



On considère la suite (u_n) définie sur N par $u_n = n^2$.
On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite :

n	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	1	4	9	16	25	100	2500	10000

Les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite à partir d'un certain rang.
Soit $A = 1\,000\,000$, $\forall n \geq$ ...., $u_n \geq A$. *Soit $A =$................................, $\forall n \geq$ ...., $u_n \geq A$.*

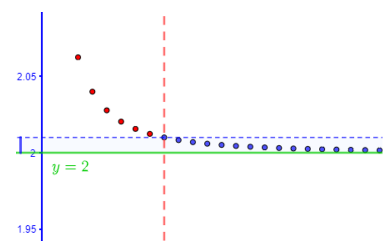
....

Soit A un réel quelconque, l'intervalle $]\,A\,;+\infty\,[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. On écrit : ....

Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]\,A\,;+\infty\,[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On écrit : ....

Définition : On dit que la suite (u_n) admet pour limite $-\infty$ ....
.... On écrit : ....

☺ Limite finie



On considère la suite (u_n) définie sur N par $u_n = 2 + \frac{1}{n}$.*
On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite :

n	1	2	3	4	5	10	15	50	500
u_n	3	2,5	2,333	2,25	2,2	2,1	2,067	2,02	2,002

Plus *n* devient grand, plus les termes de la suite semblent se rapprocher de 2.
Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.
On dit que la suite (u_n) est convergente et a pour limite 2 lorsque n tend vers $+\infty$. On écrit : ....

Définition : Soit l un nombre réel. On dit qu'une suite (u_n) a pour limite l lorsque n *tend vers* $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit alors que (u_n) *est* .... *et* .... On écrit : ....

Remarques :

☺ Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

☺ Certaines suites divergent et n'ont pas de limite.

Ex : ....

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer un seuil avec un algorithme :*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 4u_n$ et $u_0 = 2$.

Complète les algorithmes puis détermine le rang à partir duquel les termes sont supérieurs à 100 .

Langage naturel

Entrée
Saisir le réel A

Initialisation
Affecter à n la valeur ....
Affecter à u la valeur .....

Traitement des données
Tant que u .... A
Faire
Affecter à n la valeur ....
Affecter à u la valeur ......

Sortie
Afficher n

Avec une calculatrice

TI	CASIO
PROGRAM:SEUIL :Input A : →N : →U :While : : :End :Disp N	======SEUIL "A="?→A↵ →N↵ →U↵ While ↵ WhileEnd↵ N

En Python

```python
def seuil(a):
    n=
    u=
    while        :
        n=
        u=
    return(n)
```

....

....

....

II. Limites des suites usuelles.

Propriété :

☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} n =$ .... ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 =$ .... ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} =$ .... ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 =$ ....

☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} =$ .... ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} =$ .... ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} =$ ....

III. Opérations sur les limites de suites.

☺ Limite d'une Somme :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$l\,'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n =$						

....
....
....
....
....
....
....

☺ Limite d'un Produit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$l\,'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n =$									

....
....
....
....
....
....
....

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

☺ Limite d'un Quotient :

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	l	$l \neq 0$	l	∞	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$l\,' \neq 0$	0	∞	l	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$						

....
....
....
....
....
....
....

☑ Savoir-faire : Savoir déterminer la limite d'une suite par opération :

Détermine les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} + n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right)(n^2+3)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{-n^2-3}$
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....
....	....	....

☑ Savoir-faire : Savoir calculer une limite avec une forme indéterminée :

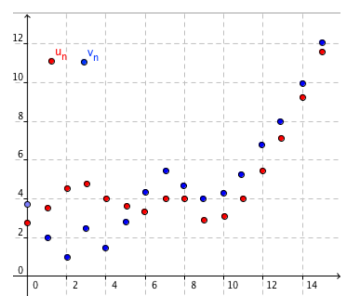
Déterminer les limites suivantes :

☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 5n + 1$ ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 3\sqrt{n}$ ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n^2+4}{4n^2+3n}$ ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^2+n}{n+3}$ ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

....
....
....
....
....
....

IV. Limites et comparaisons.

☺ Théorèmes de comparaison :



Théorèmes de comparaison :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ alors :
☺ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$ ....
☺ Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$ .... alors on peut affirmer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$ ....

Démonstration exigible :

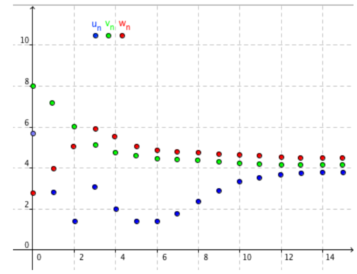
....
....
....
....

☑ Savoir-faire : Savoir déterminer une limite par comparaison :

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 + (-1)^n$

....
....

☺ Théorème d'encadrement :



Théorème des gendarmes :
Soit (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ alors :
on peut affirmer que (v_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$ ....

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer une limite par encadrement :*

Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{\sin n}{n}$

....
....

V. Limite d'une suite géométrique.

☺ Limite de q^n :

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$				

Démonstration exigible :

....
....
....

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la limite d'une suite géométrique :*

Détermine les limites suivantes : ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n}{3}$ ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 3^n$ ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

....
....
....

☺ Limite d'une suite arithmético-géométrique :

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer la limite d'une suite arithmético-géométrique :*

Détermine les limites suivantes : ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} -3 \times 2^n + 10$ ☺ $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 5$

....
....
....