Nombres complexes version géométrique.

Jean-Robert Argand *(1768-1822) mathématicien amateur suisse. En 1806, alors qu'il tient une librairie à Paris, il publie une interprétation géométrique des nombres complexes comme points du plan.*

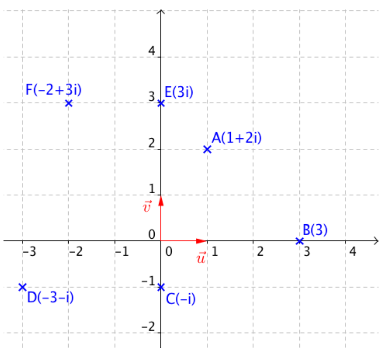
On appelle plan complexe le plan d'un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v}\,)$.

I. Représentation dans le plan complexe.

☺ Affixe d'un point.

Définition :
À tout nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, on associe le point $M(a\,;b)$ du plan complexe.
Réciproquement, à tout point $M(a\,;b)$ du plan on associe le nombre complexe $z = a + ib$.
On dit que M est le point image du nombre complexe z et que z est l'affixe du point M. On note $M(z)$.

Exemples :



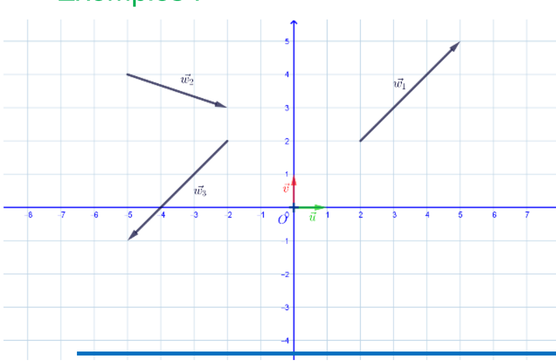
Le point F(-2 ; 3) a pour affixe le nombre complexe $z = -2 + 3i$.
....
....
....
☺ *Tout point appartenant à l'axe des abscisses a pour affixe un nombre* ....
On appelle l'axe des abscisses : ....
☺ *Tout point de l'axe des ordonnées a pour affixe un nombre* ....
On appelle l'axe des ordonnées : ....

Propriété : Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan.
☺ A et B sont confondus si et seulement si ....
☺ Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I =$ ....

☺ Affixe d'un vecteur.

Définition :
À tout nombre complexe $z = a + ib$, avec a et b réels, on associe le vecteur $\vec{w}(a\,;b)$ du plan complexe.
On dit que $\vec{w}$ est le vecteur image du nombre complexe z et que z est l'affixe du vecteur $\vec{w}$. On note $\vec{w}(z)$.

Exemples :



Détermine les affixes des vecteurs $\vec{w_1}$, $\vec{w_2}$ et $\vec{w_3}$.
....
Place les points ayant les mêmes affixes.
Remarque :
....
....

Propriété :
Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe ………………….

Propriété :
Soient $\overrightarrow{w_1}(z_1)$ et $\overrightarrow{w_2}(z_2)$ sont deux vecteurs et k un nombre réel alors :
☺ Le vecteur $\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{w_2}$ a pour affixe ………………….
☺ Le vecteur $k.\overrightarrow{w_1}$ a pour affixe ………………….

II. Module d'un nombre complexe.

☺ Définition.

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.
On appelle **module** de z, le nombre réel positif, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarques :

☺ si z est un nombre réel alors ……………………………………………………………………………………………………

☺ Le module est un nombre réel positif ………………………………………………………………………………………

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer le module d'un nombre complexe :*

Calcule les modules des nombres : ☺ $z_1 = 5 + 2i$ ☺ $z_2 = 4i$ ☺ $z_3 = -5$ ☺ $z_4 = 2 - 5i$

………

………

Propriété :
Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan, alors $AB =$ ………………….

☑ *Savoir-faire : Savoir calculer la distance entre deux points :*

Soient $A(1 + 2i)$, $B(2)$ et $C(-1 + i)$ trois points du plan, démontre que le triangle ABC est rectangle.

………

………

☑ *Savoir-faire : Savoir déterminer un ensemble de points avec le module :*

Détermine l'ensemble des points $M(z)$ tels que : ☺ $|z - 2i| = 3$ ☺ $|z - i| = |z - 3|$.

………

………

………

☺ Propriétés.

Propriété : Pour tout nombre complexe z, $|z|^2 = z\bar{z}$.

Démonstration exigible :

………

………

Propriété : Pour tout nombre complexe z : ☺ $|\bar{z}| = |z|$ ☺ $|-z| = |z|$.

....

....

Propriété : Soient z et z' deux nombres complexes, alors :

☺ $|zz'| = |z||z'|$ ☺ $|z^n| = |z|^n$ ☺ $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ ☺ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

Démonstration exigible :

....

....

....

....

☺ Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1.

Définition : L'ensemble des nombres complexes de module 1 est noté $\mathbb{U}$.

Dans le plan complexe, l'ensemble des points images des éléments de $\mathbb{U}$ est le cercle trigonométrique.

Propriété : $\mathbb{U}$ est stable par produit et passage à l'inverse.

Démonstration exigible :

....

....

....

....

....

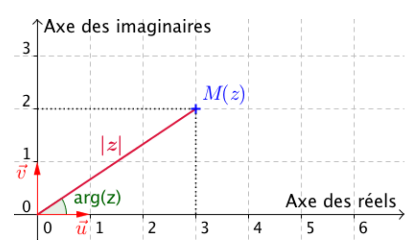
III. Argument d'un nombre complexe.

Définition : Soit un point M d'affixe z non nulle.
On appelle argument de z, noté $arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.

Remarques :

☺ Un nombre complexe z non nul possède une infinité d'arguments, tous de la forme $\arg(z) + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

☺ 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $(\widehat{\vec{\imath}; \overrightarrow{OM}})$ n'est pas défini.

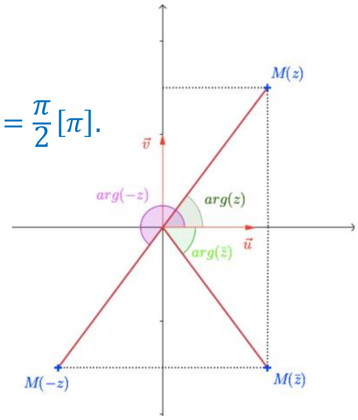


Propriété :

☺ Soit $\vec{w}(z)$ un vecteur, alors $(\widehat{\vec{u}\,;\vec{w}}) = \arg(z)\ \ [2\pi\,]$.

☺ Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan, alors $(\widehat{\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}}) =$ ....

Propriété : Pour tout nombre complexe z non nul :
☺ z est un nombre réel $\Leftrightarrow arg(z) = 0[\pi]$ ☺ z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$.
☺ $arg(\bar{z}) = -arg(z)$ ☺ $arg(-z) = arg(z) + \pi$

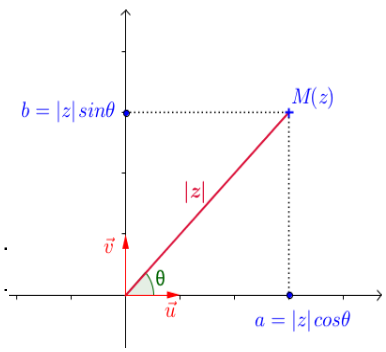


Propriété : Soient z et z' deux nombres complexes non nuls, alors :
☺ $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$ ☺ $arg(z^n) = n\, arg(z)$
☺ $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z)$ ☺ $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$

....
....
....
....
....
....
....
....

IV. Forme trigonométrique d'un nombre complexe.

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul.
En posant $\theta = arg(z)$, on a : $a = |z|\cos\theta$ et $b = |z|\sin\theta$.



....
....

Définition : On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul, l'écriture : $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $\theta = arg(z)$.

☑ *Savoir-faire : Savoir écrire un nombre sous sa forme trigonométrique :*

Écrire le nombre complexe $z = \sqrt{3} + i$ sous sa forme trigonométrique.

....
....
....
....
....
....