24

Baccalauréat S Polynésie 2014

EXERCICE 4 5 points

Commun à tous les candidats

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.
2. Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ

   Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

   a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

   b. Justifier que, pour tout réel x, $h(x) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.

   En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

   c. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

   d. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

   e. En déduire que, pour tout réel x, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.

   f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ ?
3. Étude de la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

   a. Pour tout réel x, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.

   b. Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.