

Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n. \end{array} \right.$$

1. a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

- b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .
2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

- b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n) . Soit (v_n) la suite définie sur \mathbb{N} par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

- a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n) .
- b. En déduire, que pour tout entier naturel n ,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

- c. Déterminer la limite de la suite (u_n)
4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0 u prend la valeur 2
Traitement :	Tant que ... (1) n prend la valeur ... (2) u prend la valeur ... (3) Fin Tant que
Sortie :	Afficher n