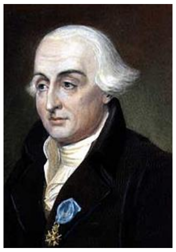
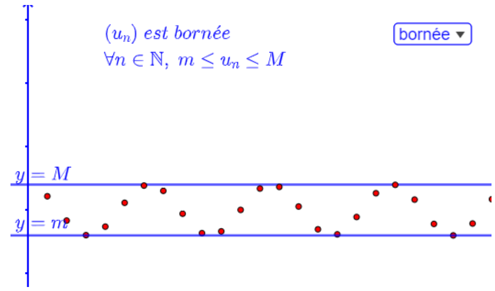


Convergence monotone.

Joseph Louis de Lagrange *(1736 ; 1813) est un mathématicien italien naturalisé français.*
C'est à lui que l'on doit la notation indicielle des suites.

I. Suites majorées, minorées, bornées.



Définition : On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :
☺ majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
☺ minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
☺ bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :

☺ Les suites de terme général $u_n = \cos(n)$ ou $u_n = (-1)^n$ sont bornées par -1 et 1.

☺ La suite de terme général $u_n = n^2$ est minorée par 0, elle n'est pas majorée.

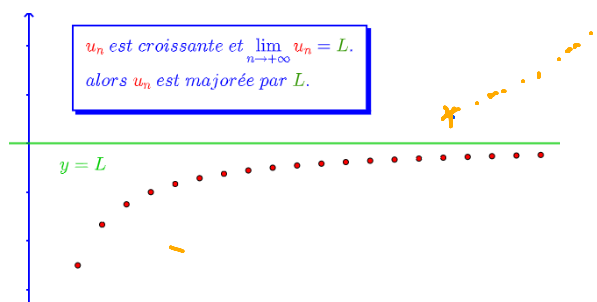
☑ *Savoir-faire : Savoir démontrer qu'une suite est majorée ou minorée :*

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3. $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq 3$

* initialisation : $U_0 = 2 \leq 3$ (OK)
* Hérédité : On suppose $\exists k$ / $U_k \leq 3$ montrons que $U_{k+1} \leq 3$
$U_k \leq 3$
$\frac{1}{3}U_k \leq \frac{3}{3}$ Donc $U_{k+1} \leq 3$ Donc $\forall n,\ U_n \leq 3$.
$\frac{1}{3}U_k + 2 \leq 1 + 2$

II. Convergence des suites monotones.



Propriété : Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$.
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ alors la suite (u_n) est majorée par l.

Démonstration par l'absurde

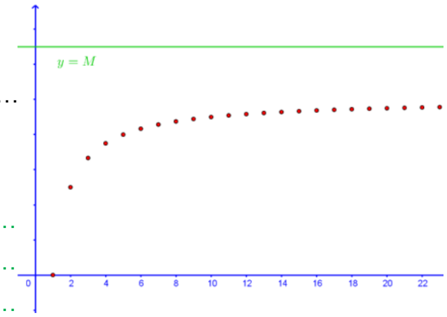
⇒ On suppose que (U_n) n'est pas majorée par l ⇒ $\exists n_0$ / $U_{n_0} > l$.
$\lim_{n\to+\infty} U_n = l$ donc $\forall I$ contenant l, $\exists n_1$ / $\forall n \geq n_1$ $U_n \in I$.
Si I ne contient pas U_{n_0}, alors $\exists n_1$ / $\forall n \geq n_1$ $U_n \in I$
mais car (U_n) est croissante $\forall n \geq n_0$ $U_n \geq U_{n_0}$ - pas possible

Donc (U_n) est majorée par l.

Théorème de convergence monotone (admis) :

☺ Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente .

☺ Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.



Remarque :

* Cela nous permet d'affirmer qu'une suite converge alors qu'on ne sait pas calculer sa limite.
* La limite n'est pas forcément le majorant (le minorant)

☑ Savoir-faire : Savoir utiliser le théorème de convergence monotone :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}\,u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

Démontrer que la suite (u_n) est convergente. $\forall n,\ u_n \leq 3$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = -\frac{2}{3}u_n + 2 \geq 0$ $\quad u_n \leq 3 \quad -\frac{2}{3}u_n + 2 \geq 0$

Donc (u_n) est croissante et comme (u_n) est majorée par 3

D'après le Théorème de convergence monotone, on peut affirmer que (u_n) converge.

☑ Savoir-faire : Savoir déterminer une limite après avoir prouver qu'une suite est convergente :

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}\,u_n + 2$ et $u_0 = 2$.

La suite (u_n) est convergente, détermine sa limite.

(u_n) converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ $\quad$ On a $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \frac{1}{3} \times \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + 2$

$\Rightarrow \ell = \frac{1}{3}\ell + 2$

$\Rightarrow \ell = 3$.

Théorème :

Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.

Démonstration exigible :

Soit A un nombre, comme (u_n) n'est pas majorée, $\exists n_0 / u_{n_0} > A$

comme (u_n) est croissante $\forall n \geq n_0 \quad u_n > A$

Donc $\forall A, \exists n_0 / \forall n \geq n_0 \quad u_n > A$ (on retrouve la définition).

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Théorème :

Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.